VII A Folgen und Reihen von Funktionen

① Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

$D \subset \mathbb{R}^1$, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}^1$ $n = 1, 2, \ldots$ $D(f_n) = D$ Funktionenfolge

Fixiert man $x_0 \in D$, dann ist $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$ eine Folge reeller Zahlen: $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$.

Frage: Konvergiert oder divergiert diese? Für welche $x \in D$ konvergiert $\{f_n(x)\}$?

z. B. $f_n(x) = x^n$ $x \in D = \mathbb{R}^1$:

$x \in (-1, 1]$, dann ist $\{f_n(x)\}$ konvergent,

$x \notin (-1, 1]$, dann ist die Folge $\{f_n(x)\}$ divergent.

□: $x \in (-1, 1) \Longleftrightarrow |x| < 1$ $f_n(x) = x^n \longrightarrow 0$

$x = +1$ $f_n(x) = 1 \longrightarrow 1$ $\Big\}$ also für diese x hat man Konvergenz.

$|x| > 1$ $f_n(x) = x^n \not\longrightarrow$ oder $x^n \longrightarrow +\infty$

$x = -1$ $f_n(x) = (-1)^n$ $\Big\}$ Divergenz

■

Sei $S \subset D$

Definition. Man sagt, die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf der Menge S punktweise, wenn für $\forall x \in S$ die Zahlenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

$\{f_n\}$, $S \subset D = D(f_n)$ konvergiere punktweise auf S. Dann ist auf der Menge S eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^1$ durch die Festlegung

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad x \in S$$

definiert, die Grenzfunktion der Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

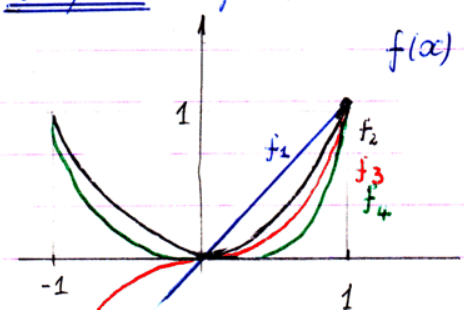
Punktweise Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ auf S zu der Funktion f heißt:

Für jeden (·) $x \in S$

und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(x, \varepsilon)$: $\forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

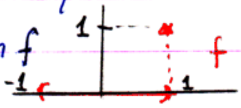
Beispiel. $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise auf $S = (-1, 1]$ zu der Funktion

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



Alle Kurven verlaufen durch den (·) $(1, 1)$,

Grenzfunktion f



<u>Natürliche Frage</u>: Die Funktionen f_n besitzen alle eine bestimmte Eigenschaft (P), und $\{f_n\}$ konvergiere punktweise auf einer Menge S zur Grenzfunktion f.

Besitzt dann f ebenfalls die Eigenschaft (P)?

i.a. Nein!

In unserem Beispiel:

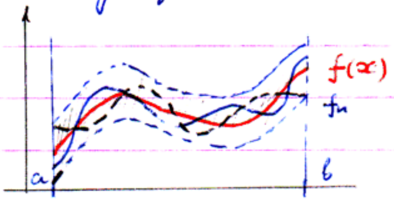
$$\left.\begin{array}{l}\text{alle } x^n \text{ sind } \underline{\text{stetig}} \text{ auf } [-1,1] \text{ und} \\ \{x^n\} \text{ konv. pktw. zu } f \text{ auf } [-1,1]\end{array}\right\} \text{ aber } f \text{ ist } \underline{\text{nicht stetig}} \text{ auf } [-1,1].$$

Die pktw. Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ zu f ist zu schwach, um die Stetigkeit von allen f_n auf f zu übertragen.

<u>Definition.</u> Eine Folge von Funktionen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $D(f_n) = D \subset R^1$ heißt **gleichmäßig konvergent** zu f auf der Menge $S \subset D$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ <u>gleichzeitig</u> für $\forall x \in S$.

Vergleich mit pktw. Konvergenz. Hier: es $\exists$ für <u>alle</u> $x \in S$ ein gemeinsames N (simultanes)

$$\underbrace{\text{gemeinsames } N \text{ (simultanes)}}_{\text{gleichmäßig} = \text{uniform}}$$



$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$
ab $n > N$ für alle $x \in [a,b]$.

<u>Beispiele.</u>

1) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n} \qquad D = R^1, \quad n = 1, 2, \ldots$

$|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in D \rightsquigarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \{f_n\}$ konv. pktw. zu $f \equiv 0 \quad \forall x$

Glm. Konvergenz? $\varepsilon > 0$. $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. $n > N \rightsquigarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

$$|f_n(x) - \underset{f(x)}{\underset{\|}{0}}| = |f_n(x)| \le \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \begin{array}{l}\forall x \in R^1 \\ \forall n > N\end{array} \rightsquigarrow \text{gleichmäßige Konv. auf } R^1.$$

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2} \qquad D = R^1, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \qquad f_n(0) = 0 \quad \forall n \\ x \neq 0 \\ \qquad f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2 x^2 \left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)} = \dfrac{1}{nx\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\{f_n\} \text{ konv. pktw. zu} \\ f \equiv 0 \text{ auf } R^1.\end{array}$$

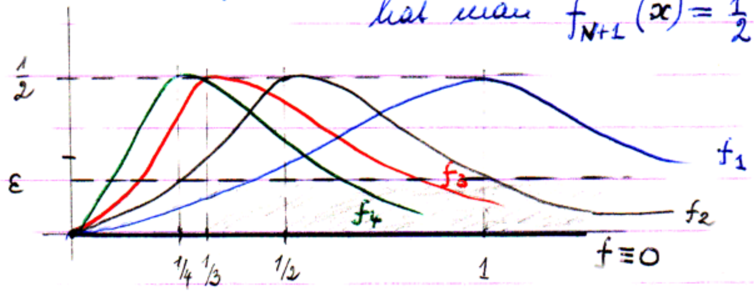
Glm. Konvergenz? $\varepsilon > 0$. $f_n'(x) = \dfrac{n - n^3 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$, $\underbrace{f_n'(x) = 0 \rightsquigarrow x = \pm\frac{1}{n} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}}$

$\forall n \qquad \max\limits_{R^1} f_n(x) = \frac{1}{2} = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$

Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. Läge glm. Konv. vor, dann müßte von einer gewissen Nummer N an für **alle** $x \in \mathbb{R}^1$ gleichzeitig

$$|f_n(x) - 0| < \frac{1}{4} \quad \text{gelten.}$$

Jedoch: betrachtet man für $\forall N$ jeweils $x = \frac{1}{N+1}$, dann hat man $f_{N+1}(x) = \frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$ ↯ **keine glm. Konvergenz auf $\mathbb{R}^1$.**



3) $f_n(x) = x^n$, $D = (-1, 1]$ **keine glm. Konvergenz auf $(-1, 1]$.**

Aber: fixiert man α mit $0 < \alpha < 1$, dann kann man zeigen, daß $\{f_n\}$ auf $[-\alpha, \alpha]$ gleichmäßig konvergiert.

(AN. VIII)

Bemerkung: Gleichmäßige Konvergenz hängt von 2 Fakten ab.

Eigenschaften der Funktionen f_n **und** Eigenschaften der Menge S

Satz (Cauchy-Bedingung für die glm. Konvergenz)

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei eine Folge von Funktionen auf D.

$\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf der Menge $S \subset D$ (zu einer gewissen Fkt. f) $\Longleftrightarrow$ für $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, so daß $\forall n, m > N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S.$$

Beweis: $\Longrightarrow$: $\{f_n\}$ glm. konv. zu f auf S: d.h.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N: \quad m>N \quad |f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x\in S$$
$$n>N \quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x\in S.$$

Seien jetzt $n>m>N$, dann gilt

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \forall x\in S.$$

$\Longleftarrow$: Wir haben die Bed. d. Satzes vorliegen, wobei N nur von ε abhängt. Fixieren wir ein $x\in S$, dann bedeutet diese Bedingung

$$\underbrace{\forall \varepsilon>0 \quad \exists N: \ n>m>N \quad |f_n(x)-f_m(x)|}<\varepsilon$$

das ist aber genau die Bed. (*) aus II (8), wonach die Zahlenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist und nach dem Satz von Cauchy konvergent ist:

Also es $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$; bezeichnen diese Zahl, die ja offenbar von x abhängt, mit $f(x)$.

$\underline{f(x):=\lim\limits_{n} f_n(x)}$. Damit ist auf S eine Funktion f, die Grenzfunktion, definiert.

Wir haben auf S zunächst punktweise Konvergenz zu f.

In $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ gehe $m\longrightarrow+\infty \rightsquigarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ für $\forall n>N$, gleichzeitig für $\forall x\in S$.
$(\forall x\in S,\ \forall n,m>N)$

Damit ist auf S die gleichmäßige Konvergenz gezeigt. #

② Eigenschaften der Grenzfunktion

Satz 1. (Stetigkeit der Grenzfunktion)

$\{f_n\}$ sei eine auf D gegebene Folge von stetigen Funktionen.
Wenn $\{f_n\}$ auf $S \subset D$ gleichmäßig zu der Funktion f konvergiert $\Big\} \Longrightarrow$ f stetig auf S.

Glm. Konvergenz ist hinreichend, jedoch nicht notwendig für die Stetigkeit von f.

$f_n(x) = x^n$ $\quad (-1,1)$. $\quad f_n \xrightarrow[n]{} 0$ nicht glm. aber $f \equiv 0$ ist stetig.

Satz 2. (Bedingungen für glm. Konvergenz) Dini

f_n stetig $\forall n$
S kompakte Menge
$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \quad \forall x \in S$
f stetig auf S.
Wenn $\{f_n\}$ punktweise zu f konvergiert, dann auch glm. auf S.

□ Wir zeigen, daß f in jedem (·) $x_0 \in S$ stetig ist.

$\varepsilon > 0$. $\quad$ Glm. Konv. auf S $\rightsquigarrow$ $\exists N: \ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in S$

Sei $n_0 > N$. $\quad f_{n_0}$ ist stetig im (·) x_0 $\rightsquigarrow$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so daß
$\forall x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei jetzt $x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

da $n_0 > N$, $x \in S$ und glm. Konv. auf S. — da f_{n_0} stetig im (·) x_0. — da $n_0 > N$, $x_0 \in S$ und glm. Konv. auf S.

Satz 3. (Grenzübergang unter dem Integral)

$\{f_n\}$ sei eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ $n=1,2,\dots$

Wenn $\{f_n\}$ glm. auf $[a,b]$ zur Funktion f konvergiert, dann gelten

1.) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

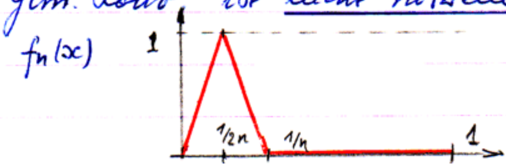
2.) $\int_a^b \lim f_n \, dx = \lim \int_a^b f_n \, dx$ (d.h. $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$)

(Integration und Grenzwert sind bei glm. Konvergenz vertauschbar!) □ 2.3 — 2.4 ■

Spezialfall: $f_n \in C[a,b]$ $n=1,2,\dots$ f_n glm. konv. auf $[a,b]$ zu f.
Dann ist $f \in C[a,b]$ und $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$

□: Ergibt sich wegen $C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$ aus den Sätzen 1 und 3. ■

Bemerkungen: 1) Glm. Konv. ist nicht notwendig für Vertauschbarkeit von $\int_a^b$ und $\lim_n$:



$f_n(x) \longrightarrow 0$, aber nicht glm. Aber $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 = \int_0^1 0 \, dx$, also $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

Beweis: 1.) Wir zeigen $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$\varepsilon > 0$. $?\exists \tau \in T[a,b]$ $S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$ und f beschränkt?

a) $\left.\begin{array}{l} f_n \text{ beschränkt auf } [a,b] \ \forall n \\ \{f_n\} \text{ gleichmäßig konvergent} \end{array}\right\}$ $\varepsilon = 1$. $\exists N: \forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$
Insbesondere $|f_{N+1}(x) - f(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$.

$$\rightsquigarrow |f(x)| \le |f_{N+1}(x)| + \underbrace{|f(x) - f_{N+1}(x)|}_{<1} \le \underbrace{|f_{N+1}(x)|}_{\le M,\text{ da } f_{N+1} \text{ beschr. } [a,b]} + 1 \le M + 1 \quad \forall x \in [a,b].$$

D.h. f ist eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion.

b) Gleichm. Konv von $\{f_n\}$ $\rightsquigarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in [a,b], \quad (1)$$

$f_{N+1} \in \mathcal{R}[a,b] \rightsquigarrow \exists\, \tau \in T[a,b],\ \tau = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^{p}$: $S(f_{N+1},\tau) - s(f_{N+1},\tau) < \frac{\varepsilon}{3}$ (2)

Wir bezeichnen $m_k^{N+1} = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f_{N+1}(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$,

$M_k^{N+1} = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f_{N+1}(x)$, $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

(f ist beschränkt)
$\downarrow$
m_k, M_k endlich

Jetzt betrachten wir

$$s(f_{N+1},\tau) - \frac{\varepsilon}{3} = \sum_{k=1}^{p} m_k^{N+1}(x_k - x_{k-1}) - \frac{\varepsilon}{3} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(m_k^{N+1} - m_k\right)}_{\le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\ (1)}(x_k - x_{k-1})}_{\le \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} m_k (x_k - x_{k-1})}_{= s(f,\tau)} - \frac{\varepsilon}{3} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + s(f,\tau) - \frac{\varepsilon}{3} = s(f,\tau) \overset{\text{gilt immer}}{\le} S(f,\tau) = \sum_{k=1}^{p} M_k (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(M_k - M_k^{N+1}\right)}_{\le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\ (1)}(x_k - x_{k-1})}_{\le \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} M_k^{N+1}(x_k - x_{k-1})}_{S(f_{N+1},\tau)} \le S(f_{N+1},\tau) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Somit $s(f_{N+1},\tau) - \frac{\varepsilon}{3} \le s(f,\tau) \le S(f,\tau) \le S(f_{N+1},\tau) + \frac{\varepsilon}{3}$.

Daraus folgt $S(f,\tau) - s(f,\tau) \le \underbrace{S(f_{N+1},\tau) - s(f_{N+1},\tau)}_{< \frac{\varepsilon}{3}\ (2)} + \frac{\varepsilon}{3} - \left(-\frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon$, also $f \in R[a,b]$.

2.) $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b \underbrace{(f_n - f)}_{< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}} \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \int_a^b 1 = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, also

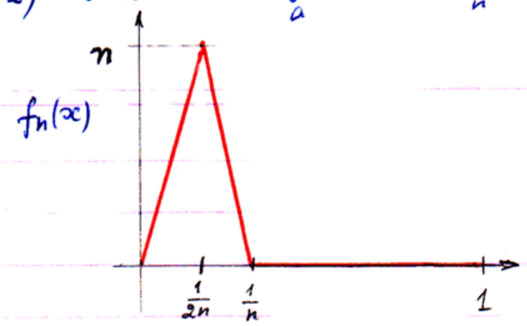
(1) $< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ für $\forall x \in [a,b]$ und <u>n genügend</u> groß: $n > N$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n .$$

■

→ S. 2.2

2) I. a. sind $\int_a^b$ und $\lim_n$ <u>nicht</u> vertauschbar.



$f_n(x) \longrightarrow 0$, aber <u>nicht</u> glm.

$$\int_0^1 f_n = \int_0^{1/n} f_n = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0 = \int_0^1 f .$$

Für die Differentiation einer Folge von differenzierbaren Funktionen ist die Lage etwas komplizierter:

$[-1,1]$, $f_n(x) = \frac{x}{e^{nx^2}}$ $n = 1, 2, \ldots$ Folge konv. glm. auf $[-1,1]$ zu 0.

$f_n'(x) = \frac{1 - 2nx^2}{e^{nx^2}}$, $\left.\begin{array}{l} f_n'(0) = 1 \quad \forall n \\ f'(x) \equiv 0 \end{array}\right\} \leadsto f_n'(0) \not\longrightarrow f'(0)$

also glm. Konv. der Folge ist nicht ausreichend für Grenzübergang unter dem „Zeichen der Ableitung"!

<u>Satz 4.</u>

$\{f_n\}$, $f_n \in C^1[a,b]$.

Wenn 1) $\{f_n\}$ konvergiert in wenigstens einem $(\cdot)\, x_0 \in [a,b]$, 2.) $\{f_n'\}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ zu einer gewissen Funktion φ,

dann gelten

(i) $\{f_n\}$ konvergiert glm. auf $[a,b]$ zu einer Funktion f,

(ii) $f \in C^1[a,b]$

(iii) $\{f_n'\}$ konvergiert zu f' (d.h. $f' = \varphi$) (d.h. $f_n' \longrightarrow f'$)

(Vertauschbarkeit von Abl. und lim.)

Beweis: $f_n \in C^1([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$.

(i) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ ist konv. Zahlenfolge: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall m,n > N_1\ |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$.

$\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ ist glm. konv. $\underset{\text{Bed.}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\rightsquigarrow}}$ $\exists N_2 : \forall m,n > N_2\ \ |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$,

simultan für $\forall \xi \in [a,b]$.

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\,d\xi = f_n(x) - f_n(x_0) \quad \forall n \rightsquigarrow \boxed{f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\,d\xi + f_n(x_0).}$$

Sei $N^* = \max\{N_1, N_2\}$. Für $\forall m,n > N^*$ gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f_n' - f_m')(\xi)\,d\xi + f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| \le \underbrace{\int_{x_0}^{x} \underbrace{|f_n' - f_m'|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a+1}}\,d\xi}_{< \frac{\varepsilon}{b-a+1}|x-x_0|} + \underbrace{|f_n(x_0) - f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a+1}} <$$

(Satz 6 aus VII 5)

$$< \frac{\varepsilon}{b-a+1}(b-a) + \frac{\varepsilon}{b-a+1} = \frac{\varepsilon(b-a+1)}{b-a+1} = \varepsilon \underset{\text{für } \{f_n\}}{\overset{}{\underset{\text{Cauchy-Bed.}}{\rightsquigarrow}}}$$

$\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ zu einer gewissen Funktion f.

ii), iii) Nach 2) konv. $\{f_n'\}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig zu der Funktion φ.

Satz 1 $\rightsquigarrow$ φ ist stetig auf $[a,b]$.

Wir zeigen, daß $f' = \varphi$ gilt.

Fixiert man $x \in [a,b]$, dann hat man nach Satz 3:

$$\underbrace{\int_a^x f_n'(\xi)\,d\xi}_{= f_n(x) - f_n(a)} \xrightarrow[n]{} \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$$

wegen (i): $f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi \qquad (*)$$

d.h. $f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$

Stetigkeit von φ auf $[a,b]$ $\underset{\text{(Folgerung Satz 1 aus VII 6)}}{\rightsquigarrow}$ $\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$ ist differenzierbar, und es gilt

$$\underbrace{\left(\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi\right)_x'}_{\overset{(*)}{=} f'(x)} = \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Also gilt $f' = \varphi$, woraus (ii) und (iii) folgen. ∎

③ Funktionenreihen und ihre Summen

$f_n : D \subset \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad n = 1, 2, \ldots$

$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ n-te Partialsumme

$\downarrow$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neue Funktionenfolge auf D

$\downarrow$

sei auf einer Menge $S \subset D$ punktweise konvergent, d.h. $\exists\ s(x) = \lim_n s_n(x)$ auf S.

In diesem Falle bezeichnet man $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ und sagt: die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise auf S und nennt die Funktion $s(x)$ die Summe der Reihe.

In den Punkten aus D, in den die Folge $\{s_n(x)\}$ divergiert, nennt man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ divergent.

Man definiert: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf S, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen gleichmäßig auf S konvergiert.

Wir erhalten nun für Funktionenreihen und ihre Summen die folgenden Resultate:

Satz'. (Cauchy-Bed. für die glm. Konvergenz einer Funktionenreihe)

$\{f_n\}$ sei eine Folge von Funktionen auf D.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $S \subset D$ (zu einer Funktion s) $\iff$ für $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, so daß $\forall n, m > N \ (n > m)$

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon$$

für $\forall x \in S$

Satz 1'. (Stetigkeit der Summe)

Sind alle f_n stetig auf $S \subset D$ und konv. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf S, dann ist ihre Summe $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ebenfalls stetig auf S.

$\square$: $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ist stetig $\forall n$. $\{s_n\}$ konv. glm. auf S

$\Big\downarrow$ Satz 1

$s(x)$ stetig auf S. ∎

Satz 3'. (gliedweise Integration einer Reihe)

$f_n \in R[a, b] \quad n = 1, 2, \ldots$

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmäßig zu $s(x)$ konvergiert, dann gilt

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(d.h. $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$, also die gliedweise Integration einer Reihe ist bei glm. Konv. erlaubt.)

Satz 4'. (gliedweise Differentiation einer Reihe)

Seien $f_n \in C^1[a,b]$ $n = 1, 2, \ldots$

Wenn 1.) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in wenigstens einem (1) $x_0 \in [a,b]$ konvergiert,

2.) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$,

dann gelten

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ zu einer Funktion s,

(ii) $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist eine differenzierbare Funktion auf $[a,b]$,

(iii) $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ (d.h. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$)

also gliedweise Differentiation einer Reihe ist bei glm. Konv. erlaubt.

Der Weierstraß-Test für gleichmäßige Konvergenz einer Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (1) $f_n : D \longrightarrow R^1$ Funktionenreihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2) sei eine Zahlenreihe mit positiven Gliedern $a_n > 0$.

Man sagt, die Reihe (2) majorisiert die Funktionenreihe (1) auf der Menge D, wenn für $\forall n$ und $\forall x \in D$

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \text{gilt.}$$

Satz 5. (Hinreichendes Kriterium für glm. Konvergenz)

Wenn für die Reihe (1) eine Zahlenreihe (2) existiert, die auf D die Funktionenreihe (1) majorisiert, dann gilt

Konvergenz von (2) $\Longrightarrow$ gleichm. Konvergenz von (1) auf D.

□: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > m > N$, so daß

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \varepsilon.$$

Dann gilt lt. Voraussetzung

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \leq a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

$\xrightarrow[\text{Satz}']{}$ Reihe (1) konv. glm. auf D.

(Cauchy-Bed. erfüllt) ■

4 Potenzreihen

Funktionenreihen mit speziellen Funktionen f_n:

$$f_n(z) = c_n z^n \quad \text{oder} \quad f_n(z) = c_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} z_0 \text{ fix.} \in \mathbb{C} \\ c_n,\ z \in \mathbb{C} \end{array}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ Potenzreihe / power series

punktweise Konvergenz zu $f(z)$

gleichmäßige Konvergenz auf einer Menge D zu $f(z)$

Im weiteren der Einfachheit halber $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (\text{also } z_0 = 0)}$ (1)

Wenn die reelle Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^n|$ konvergiert, nennt man die Reihe (1) **absolut konvergent**.

Wie für gewöhnliche Zahlenreihen gilt: Abs. konv. $\Longrightarrow$ Konvergenz

__Frage__ nach dem Konvergenzbereich einer (komplexen) Potenzreihe, d.h.

$$P = \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \text{ konvergiert} \}$$

$P \neq \emptyset$ für jede Potenzreihe, denn $z = 0 \in P$.

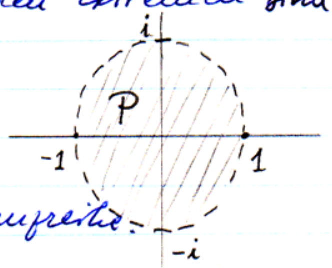
Es kann $P = \{0\}$ (z.B. für $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ D'Alembert)

$P = \mathbb{C}$ (z.B. für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$) sein,

aber auch Fälle zwischen diesen beiden Extremen sind möglich:

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konv. für $|z| < 1$

div. für $|z| \geq 1$



gelten.

Die Kreisform für P ist typisch für jede Potenzreihe.

__Satz 1.__ (Abel)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine gegebene Potenzreihe (d.h. $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sind bekannt).

Wenn (1) in einem $(\cdot)$ $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert sie absolut für jedes z mit $|z| < |z_0|$.

$\square$: $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. beliebig fixiert

$$|c_n z^n| = \underbrace{|c_n \cdot z_0^n|}_{A_n} \cdot \underbrace{\frac{|z|^n}{|z_0|^n}}_{q^n} = A_n \cdot q^n . \qquad q = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$$

(1) konv. im $(\cdot)$ z_0 $\underset{\substack{\text{bekannte} \\ \text{notwendige} \\ \text{Bedingung}}}{\rightsquigarrow}$ $c_n z_0^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, d.h. $\underbrace{|c_n z_0^n| = A_n \xrightarrow[n]{} 0}_{\exists \gamma > 0 :\ A_n \leq \gamma \quad \forall n}$

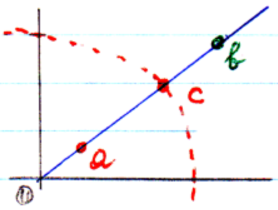
Wir haben daher $|c_n z^n| \le \gamma q^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma q^n$ ist eine Majorante für (1), die wegen $0 \le q < 1$ konvergiert.

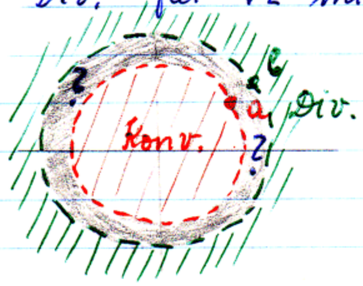
Majorantenkriterium $\rightsquigarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ konvergiert. ■

- Wenn (1) in einem (•) $z_1 \in \mathbb{C}$ <u>divergiert</u>, dann <u>divergiert</u> (1) auch in allen Punkten z mit $|z| > |z_1|$.

- Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ <u>weder überall konvergent</u> <u>noch überall</u> (bis auf $z=0$) <u>div.</u>.
Dann $\exists$ $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, wo (1) konvergiert.



Auf dem Strahl durch c gibt es dann stets Punkte a und b, in denen die Reihe konv. und divergiert.
Dann aber: Konv. für $\forall z$ mit $|z| < |a|$ und
Div. für $\forall z$ mit $|z| > |b|$



<u>Satz 2.</u> • Für jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ existiert eine nichtnegative Zahl R mit den folgenden Eigenschaften:

für $|z| < R$ konvergiert (1) absolut

für $|z| > R$ divergiert (1).

- Die Zahl R ist <u>eindeutig</u> bestimmt, $R = 0$, $R = +\infty$ ist möglich.
- $R = \sup_{z \in P} |z|$
- Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$ oder der Grenzwert $\lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l$ existiert, dann gilt jeweils $R = \frac{1}{l}$

(d.h. $R = \frac{1}{l}$, falls $0 < l < +\infty$
$R = +\infty$, falls $l = 0$
$R = 0$, falls $l = +\infty$).

s. S. 4.6

R berechnet man nach $R = \frac{1}{l}$ auch für $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Diese Zahl R heißt Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ Konvergenzkreis der Reihe.

Konvergenzkreis der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)$ ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$

Bew.: (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $\qquad P = \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ konv.} \}$

$P \neq \emptyset$. Wir nehmen für $\boxed{R = \sup_{z \in P} |z|}$ und probieren, ob die beiden Eigenschaften für R gelten.

a) $|z| < R$. $\quad R = \sup_{z \in P} |z|$, also die kleinste obere Schranke der moduli der Elemente von P. Somit gilt

$$\begin{array}{l} |z| < R \\ z \in \mathbb{C} \end{array} \rightsquigarrow \exists\, z' \in P : \; |z| < |z'| < R$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z'^n$ konv. $\xrightarrow{\text{Satz von Abel}}$ (1) konvergiert absolut im (·) z.

b) $|z| > R \rightsquigarrow z \notin P \rightsquigarrow$ Reihe (1) divergiert.

Die Existenz einer solchen Zahl ist damit bewiesen.

c) Eindeutigkeit.
Nehmen an, wir hätten 2 solcher Zahlen R_1, R_2, wobei wir $R_1 < R_2$ voraussetzen können.

Wir nehmen dann ein $z \in \mathbb{C}$ mit $R_1 < |z| < R_2$.
Es ergibt sich nun:
1) im (·) z divergiert (1) wegen Eigenschaft von R_1
2) im (·) z konvergiert (1), — " — R_2

↯ ■

Formeln für Berechnung des Konvergenzradius

1. Formel von Cauchy-Hadamard

Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.
Wenn der Grenzwert $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existiert, dann gilt

Im Satz 2 mit enthalten! $\boxed{R = \frac{1}{l}}$, d.h.

$0 < l < +\infty$, dann $R = \frac{1}{l}$
$l = 0$, dann $R = +\infty$
$l = +\infty$, dann $R = 0$

□: Fth. S. 5.6 ■

2. Formel

Wenn der Grenzwert $d = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ existiert, dann gilt $\boxed{R = \frac{1}{d}}$.

Bemerkung: Die Cauchy-Hadamard-Formel bleibt gültig, wenn
$l = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ ist.

Beispiele 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ $\qquad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} z^n$

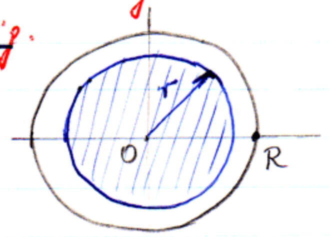
$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, $R = \frac{1}{l} = 1$. $\qquad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{n 2^n}{(n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{d} = 2$.

Auf der Kreislinie $|z| = R$ kann über die Konvergenz der betrachteten Reihe i.a. nichts ausgesagt werden.
Im Inneren des Konv.-kreises ist die Konvergenz nach S.v. Abel stets die absolute.

Darüber hinaus gilt (aus dem Majorantenkriterium)

Satz 3.

Sei der Konvergenzradius einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ positiv, d.h. $R > 0$. Ist r eine positive Zahl mit $0 < r < R$, dann konvergiert die Reihe im abgeschlossenen Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ gleichmäßig.



Für den Kreis $|z| \le R$ muß die Aussage nicht zutreffen.

Aus Satz 3 folgt sofort

Satz 4.

Im Inneren des Konvergenzkreises (d.h. auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$) ist die Summe der Reihe eine stetige Funktion von z.

□: $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z_0| < R\}$. Dann $\exists\, r$ mit $|z_0| < r < R$

Auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\} \xrightarrow[\text{Satz 3}]{}$ gleichm. Konv. $\xrightarrow[\text{Satz 1' (3)}]{}$ Summe $S(z)$ der

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist eine stetige Funktion auf $\{|z| \le r\}$.

$\downarrow$

$S(z)$ ist stetig im (·) z_0.

z_0 war ein bel. (·) aus dem Inneren des Konv.-kreises. ■

Als Summe einer konvergenten Potenzreihe (mit komplexen Gliedern) entsteht eine komplexe Funktion $S(z)$.
Grenzwert und Stetigkeit einer komplexen Funktion $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind auf natürliche Weise definiert:

- $w = f(z)$ hat Grenzwert w_0 im (·) $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn z_0 Häufungspkt von D ist und $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß
  $z \in D,\ z \ne z_0\ \ |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$
- $w = f(z)$ ist stetig im (·) $z_0 \in D$, wenn
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$, so daß
  $z \in D,\ \ |z - z_0| < \delta \longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

verweisen auf
III (3)
IV (1)
VI (9.5)
$\longrightarrow$ 4.10

- Die Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion in einem Punkt z_0 definiert man zunächst formal wie im Reellen: s. VI (9.5)
  $w = f(z)$ ist in einem Punkt $z_0 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert (und endlich ist).

Bemerkung: $\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z_0} = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ist als Quotient zweier komplexer Zahlen eine komplexe Zahl.

$$w = f(z) = u(z) + i\,v(z) \underset{z=x+iy}{\rightsquigarrow} f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Nun definiert man auf $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in D = D(f)\}$ durch

$$F : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ die zugehörige Abbildung von 2 reellen Variablen in $\mathbb{R}^2$.

Die komplexe Dif-barkeit von f ist äquivalent zur totalen Dif-barkeit von F + spezielle Gestalt der Matrix der partiellen Ableitungen

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

(Cauchy-Riemann-Bedingungen)

Jacobimatrix $F'(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

mit

$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$

$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$

Forderung der kompl. Dif-barkeit ist so stark, daß gilt:

f besitzt Ableitung beliebiger Ordng.

f kann als Summe einer Potenzreihe in Umgebung jedes Punktes dargestellt werden. analytische Funktion

Satz. (Hauptresultat über Potenzreihen)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R.
Die Summe $S(z)$ der Reihe ist im Inneren des Konvergenzkreises, also in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ eine differenzierbare Funktion.
Darüber hinaus ist für die Reihe die gliedweise Differentiation in jedem (·) dieses Kreises erlaubt, d.h. es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = S'(z)$$

$$\text{d.h. } \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)' .$$

Folgerungen:

1) Im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ kann jede Potenzreihe unendl. oft differenziert werden. Summe $S(z)$ einer konvergenten Potenzreihe ist eine analyt. Funktion, d.h. $\forall z_0 : |z_0| < R$ $\exists$ Umgebung, in der $S(z)$ Summe einer Potenzreihe $\sum_{n=0} c_n (z-z_0)^n$ ist.

2) Es gelten die Formeln

$$S(z) = \sum_{n=0} c_n z^n$$

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

$$S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

$$\vdots$$

3) Die Koeffizienten einer Potenzreihe können als Werte ihrer Summe und deren Ableitungen ausgedrückt werden:

$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $\quad z = 0 \quad$ $S(0) = c_0$
$(R > 0)$ $\quad\quad S'(0) = c_1$
$S''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2$
$\vdots$
$S^{(n)}(0) = n!\, c_n$

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\rightsquigarrow S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

bzw. $\rightsquigarrow S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

4) Ist eine Funktion f in der Umgebung eines Punktes z_0 die Summe einer Potenzreihe (man sagt: f ist als Potenzreihe darstellbar), d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, dann gilt $f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}_{\text{Taylorreihe von } f \text{ an der Stelle } z_0.}$

□ (1) $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad |z| < R$; $\quad$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

Wir zeigen die Gleichheit $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$.

Konvergenzradius von (2): zunächst hat Reihe (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n$ den gleichen Konvergenzradius wie (2). Denn

Bemerkung für Cauchy-Hadamard-Formel $\to$ (3) $\limsup \sqrt[n]{n|c_n|}$
$\to$ (1) $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$

Es gilt $\limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup \underbrace{\left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}\right)}$

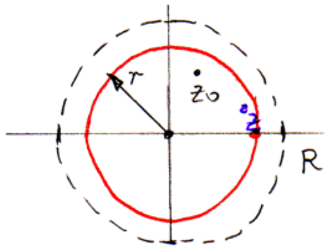
$$= \lim \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

$$\left(\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow{\;\to 0\;} 1 \right)$$

Die Konvergenzradien von (3) und (2) stimmen mit dem von (1) überein, sind also R.

Satz 4: Summe $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ der Reihe (2) ist im Konvergenzkreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ eine stetige Funktion.

Wir zeigen nun $\boxed{\varphi = S'}$. Sei z_0 beliebige komplexe Zahl mit $|z_0| < R$. Wir wählen eine Zahl r mit $|z_0| < r < R$ und betrachten Kreis



Sei $z \neq z_0$, $|z| \leq r$.

$$S(z) - S(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n)$$

$n = 0$: $z^0 - z_0^0 = 1 - 1 = 0$

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\overbrace{z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}}^{n \text{ Summanden}} \Big) \quad (4)$$

$$(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})(z - z_0) = z^n - z_0^n$$

Betrachtet man Reihe (2) für den Punkt $z = r$, dann konvergiert

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}}_{\text{Majorante für (4) auf } \{z :\, |z| \leq r\}} \quad (r < R).$ $\Longrightarrow$ (4) konvergiert gleichmäßig in $\{|z| \leq r\}$, so dass ihre Summe stetige Funktion wird, insbesondere im (·) z_0.

Sei $f(z)$ die Summe von (4):

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1} = \varphi(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

(rechte Seite von (4) ist auch im (·) z_0 definiert)

Stetigkeit von f im (·) z_0 bedeutet: $f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} f(z_0)$, d.h.

$$\underbrace{f(z) = \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{}} \varphi(z_0) = f(z_0)$$

$$S'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z_0).$$

Das gilt für $\forall z_0$ aus Kreis mit Radius $r < R$.

$\Downarrow$

$S' = \varphi$ im Konvergenzkreis; die gliedweise Differentiation ist damit begründet. ■

Wir kommen auf Taylorreihen zurück:

Sei eine Funktion f auf einem Intervall $I=[x_0,x]\cup[x,x_0]\subset D(f)$

- beliebig oft differenzierbar und gelte für $R^f_{x_0,n}(x)=f(x)-T^f_{x_0,n}(x)$
- $R^f_{x_0,n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

dann hat man $T^f_{x_0,n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\quad \forall x\in I$, d.h. $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$

$$\lim_{n\to\infty}T^f_{x_0,n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

Taylorentwicklung / Taylorreihe von f im $(\cdot)$ x_0

Hinreichende Bedingung: $\exists$ Zahlen α, M mit

$$|f^{(n)}(u)|\le\alpha M^n \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in I.$$

Es ergibt sich daraus:
(Restglied nach Lagrange)

$$\boxed{|R^f_{x_0,n}(x)|\le\alpha\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0$$

(aus Grenzwerttheorie ist bekannt: $\frac{M^n}{n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, da $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\longrightarrow 0$)

weiter: $f(x)=\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\qquad x\in(-1,1]$; $\quad\ln(1+z)\quad |z|<1$

$$f(x)=(1+x)^\mu=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\dots\quad |x|<1\qquad \binom{\mu}{k}:=\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!}$$

$(1+z)^\mu\quad |z|<1$

Diese Taylorentwicklungen dienen oftmals zur Definition der entsprechenden Funktion. Im Komplexen ist das vorerst gar nicht anders möglich.

Z.B. hatten wir die reelle Sinusfunktion bisher noch nicht exakt definiert, sondern uns lediglich mit einigen geometrischen Interpretationen am Einheitskreis begnügt.

Aus den Taylorreihen für e^z, $\sin z$ und $\cos z$ erhält man jetzt die Begründung für $\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi}$

Koeffizienten der Taylorreihe (auch bereits des Taylorpolynoms) haben die Form $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\longrightarrow$ Satz. Jede Potenzreihe ist die Taylorreihe ihrer Summe.

Def Eine Funktion $f: D(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt analytisch auf der (offenen) Menge $S \subset D(f)$, (S = Intervall, wenn $D(f) \subset \mathbb{R}^1$; i.a. $D(f) \subset \mathbb{C}$)
wenn

a) $f \in C^\infty(S)$, also f ist bel. oft differenzierbar

b) für $\forall z_0 \in S$ konvergiert die Taylorreihe von f in einer Umgebung des (·) z_0 zu f
(≡ in einer Umgebung des (·) z_0 ist f in eine Potenzreihe entwickelbar)

genauer: $\forall z_0 \in S \quad \exists\, r(z_0) > 0$

$$\forall z \in \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r(z_0) \} \text{ gilt } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

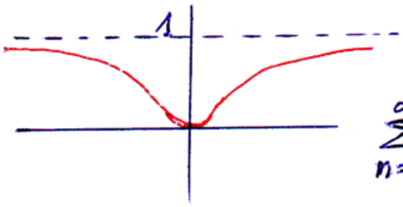
Klasse der analyt. Funktionen auf S: $\mathcal{A}(S)$.

Beispiele: $f(z) = e^z$, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ganze Funktionen

Offenbar gilt: $C \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^n \supset C^{n+1} \supset \ldots \supset C^\infty \supset \mathcal{A}$

Interessant: $C^\infty \neq \mathcal{A}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



$\forall n \ \exists\, f^{(n)}(x)$,
$f^{(n)}(0) = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$
aber $f(x) > 0 \quad x \neq 0$

⑤ Fourierreihen

5.1 Fourierreihen und -koeffizienten

uns interessiert die Frage, welche Funktionen $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ sich als eine trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit geeigneten Koeffizienten a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ darstellen lassen?

$\cos nx$, $\sin nx$ 2π-periodisch $\rightsquigarrow$ f 2π-periodisch.

Die Zahl ω heißt **Periode der Funktion f**, wenn $f(x+\omega) = f(x)$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Im weiteren betrachten wir deshalb nur Funktionen, die auf $(-\infty, +\infty)$ periodisch mit Periode 2π (wie $\cos nx$ und $\sin nx$) sind oder einfach Funktionen, die zunächst nur auf $[-\pi, \pi]$ definiert sind.

Satz 1. Sei f eine Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

besitzt, wobei die Reihe auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergiert.
Dann ist f auf $[-\pi, \pi]$ stetig, und es gelten die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad n = 1, 2, \ldots$$

Euler-Fourier-Formeln

□: Glm. Konvergenz $\rightsquigarrow$ f stetig auf $[-\pi, \pi]$ $\rightsquigarrow$ $f \in R[-\pi, \pi]$

$\rightsquigarrow$ gliedweise Integration auf $[-\pi, \pi]$ ist erlaubt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx}_{= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx}_{=0} \right) \rightsquigarrow \int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = \underline{\underline{a_0 \pi.}}$$

$a_k = ?$ Wir multiplizieren die Reihe mit $\cos kx$.
Da $\cos kx$ beschränkt, bleibt gleichmäßige Konvergenz erhalten, und erneut ist die gliedweise Integration über $[-\pi, \pi]$ erlaubt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx}_{=0,\ \text{falls } n \neq k} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx}_{=0} \right) =$$

$$= a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx}_{=\pi} = \underline{\underline{a_k \cdot \pi}}$$

s. Übungen zu VII.

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2kx)\, dx = \pi \right)$$

Analog zeigt man die Formel für b_k. ■

Der Satz besagt: **hat** f eine solche Darstellung, dann sind Koeff. a_n, b_n eindeutig.

Uns interessiert nach wie vor, ob es überhaupt möglich ist, eine Funktion f als trigonometrische Reihe darzustellen.

Sei f auf $[-\pi,\pi]$ integrierbar. Dann sind die folgenden Integrale sinnvoll.

Wir setzen $a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

Diese Zahlen heißen die Fourierkoeffizienten von f (bezügl. des Systems $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ $\sin x, \sin 2x, \ldots$)

Die formale Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

heißt die Fourierreihe zu f.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a) Konvergiert diese Reihe überhaupt?

b) Wenn sie konvergiert, für welche x konvergiert sie evt. zu $f(x)$?

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0, & [-\pi, 0) \\ 1, & [0,\pi] \end{cases}$ ist integrierbar auf $[-\pi,\pi]$,

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kx\,dx = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1-\cos k\pi}{k\pi} = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$f \sim \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)}_{s(x)}$$

$f(0) = 1$

$s(0) = \frac{1}{2}$, also $f(0) \neq s(0)$.

Für Konvergenzuntersuchungen muß man die Partialsummen (oder Fourier-polynome) $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ $\quad x \in [-\pi,\pi]$ untersuchen und

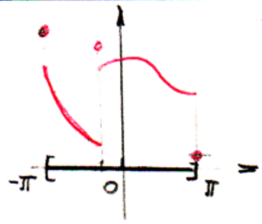
$s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ für einige x oder auf $[-\pi,\pi]$ überprüfen.

Sei $f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion.
Wir setzen diese Funktion vom Intervall $[-\pi,\pi]$ zu einer 2π-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Dazu benötigen wir 2 Schritte:

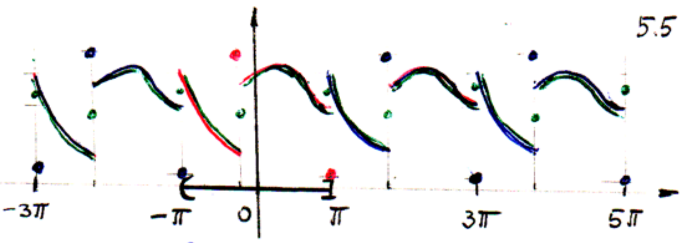
$\tilde f(x): \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$; $\tilde f(x) = f(x-2k\pi)$ falls $x \in \big((2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi\big]$

(es können in den Punkten $(2k+1)\pi$ neue Sprungstellen entstehen, es sei denn $f(-\pi+0) = f(\pi-0) = \tilde f(-\pi) = \tilde f(\pi)$.)

Daher noch $\tilde{\tilde f}(x): \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ $\quad \tilde{\tilde f}(x) = \frac{1}{2}\left(\tilde f(x+0) + \tilde f(x-0)\right)$



$f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^1$



5.2 Konvergenz der Fourierreihen

$f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $\quad \tilde f(x): \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ periodische Standarderweiterung

$\tilde{\tilde f}(x) := \frac{1}{2}\left(\tilde f(x+0) + \tilde f(x-0)\right)$

5.4

Satz 2. (Dirichlet)

Sei $f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ eine stückweise glatte Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen, in denen aber die endlichen einseitigen Grenzwerte $f(x-0)$ und $f(x+0)$, $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ existieren.

Dann konvergieren die Fourierpolynome s_n gegen die periodische Fortsetzung $\tilde{\tilde f}$ punktweise, d.h. $s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\tilde f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Darüber hinaus gilt:

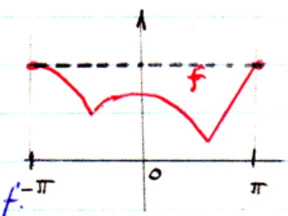
Ist $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von $\tilde f$, dann gilt $s_n(x) \xrightarrow[n]{} \tilde{\tilde f}(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Folgerung (wichtigste Anwendung)

Sei f stetig und stückweise glatt und gelte $f(\pi) = f(-\pi)$.

Dann gilt $\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$. $\quad a_n, b_n$ sind die Fourierkoeff. von f.



1.V. 2003/04

$f: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

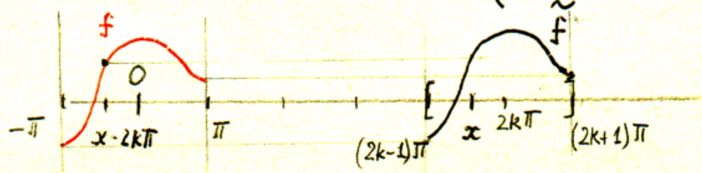
$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

Konvergenz? Satz von Dirichlet

$s_n(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x+0) + \tilde{f}(x-0)\right)$, wobei

$\tilde{f}: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ definiert war durch

$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi)$, $x \in \left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right]$



Bemerkungen:

1) Satz v. Dirichlet $\rightsquigarrow$ Fourierreihe von f konvergiert zum Sprungmittel $\tilde{\tilde{f}}(x)$:

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

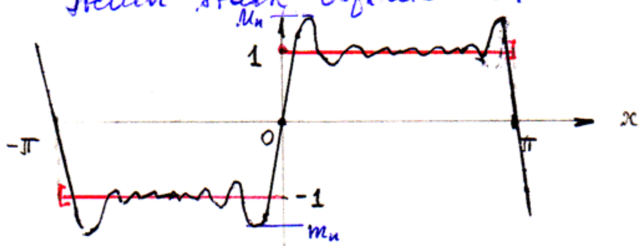
$$\frac{1}{2}\left(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)\right) \qquad x = \pm\pi$$

(und damit zu $f(x)$, falls f in (·) $x \in [-\pi, \pi]$ stetig ist).

2) Gibbsches Phänomen.

In der Umgebung einer Sprungstelle von $\tilde{\tilde{f}}$ kann die Fourierreihe natürlich nicht gleichmäßig konvergieren. ($\tilde{\tilde{f}}$ müßte ja dann auf dieser Menge stetig sein!)

In der Tat erweist sich, daß die Fourierpolynome in der Umgebung solcher Stellen stark oszillieren:



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

$s_n(x)$: Sei x eine Sprungstelle von $\tilde{\tilde{f}}$, und M_n, m_n die nächstgelegenen Max. und Min. von s_n. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(M_n - m_n) \approx 1.18\cdot\left(\tilde{\tilde{f}}(x+0) - \tilde{\tilde{f}}(x-0)\right).$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.18 .$$

Man stelle das Fourierpolynom $s_n(x)$ von f in der Umgebung von 0 dar, etwa für $n \approx 20$, und vergleiche s_{20} mit f.

5.3 Der Fall $[-l, l]$

Sei die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-l, l]$ (mit bel. $l > 0$) gegeben. Bed. d. S. v. Dirichlet seien im weiteren stets erfüllt

Die Substitution $x = \frac{l}{\pi} y$ $\quad y \in [-\pi, \pi]$

ergibt dann die Funktion $\varphi(y) = f\left(\frac{l}{\pi} y\right)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Unter den Bedingungen des Satzes von Dirichlet kann man dann φ bzw. $\tilde{\varphi}$ als Fourierreihe darstellen:

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos ny + b_n \sin ny\right),$$

deren Koeffizienten sich nach den Euler-Fourier-Formeln berechnen:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{f\left(\frac{l}{\pi} y\right)}^{=\varphi(y)} \cos ny\, dy, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} y\right) \sin ny\, dy$$

$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots$

Nach Übergang zu der ursprünglichen Variablen x, also dem Ersetzen durch

$$y = \frac{\pi}{l} x,$$

erhalten wir die Zerlegung der gegebenen Funktion $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe (bezüglich x)

$$\boxed{f(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right).}$$

Die Koeffizientenformeln erhalten durch Rücktransformation die Gestalt: $\left(dy = \frac{\pi}{l}dx\right)$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx .$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad$ $n = 1, 2, \dots$

5.4 Zerlegung in eine Kosinus- bzw. Sinusreihe

Sei $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegeben und genüge den Bed. des Satzes v. Dirichlet

2 Sonderfälle

f ist ungerade

$f(-x) = -f(x)$
$(x \in (0, \pi])$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$f(x)\cos nx$ ist dann ebenfalls ungerade, somit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

f ist gerade

$f(-x) = f(x)$
$(x \in (0, \pi])$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$f(x)\sin nx$ ist dann eine ungerade Funktion, somit

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

$(n = 1, 2, \dots)$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$f(x)\sin nx$ ist dann gerade, somit

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

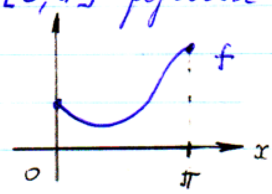
$(n = 1, 2, \dots)$

$f(x)\cos nx$ ist dann gerade, somit

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

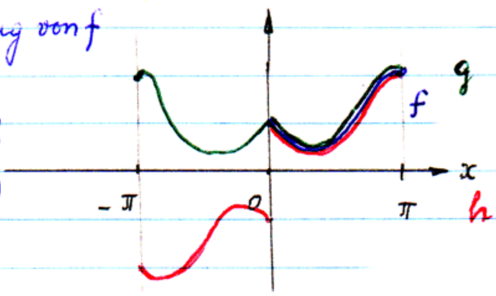
Sei jetzt f eine nur auf $[0, \pi]$ gegebene Funktion, die in eine Fourierreihe entwickelt werden soll.



Wir ergänzen f, indem wir f irgendwie auf $[-\pi, 0)$ fortsetzen und dann unsere Theorie anwenden.

g - gerade Fortsetzung von f
h - ungerade

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$



$g \rightsquigarrow$ Kosinusreihe

$h \rightsquigarrow$ Sinusreihe

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Unter den Bedingungen von Satz 2 konvergieren diese beiden Reihen wie dort angegeben.

Sei f in den (·) $x=0$ und $x=\pi$ stetig. Dann ist im

→ (·) $x=0$ die gerade Fortsetzung g ebenfalls stetig und die Kosinusreihe konvergiert bei $x=0$ gegen den Wert $f(0)$.
Analoges gilt für den (·) $x=\pi$ (wegen $g(\pi-0)=g(\pi)=f(\pi)$)

→ (·) $x=0$ und im (·) $x=\pi$ die ungerade Fortsetzung h nicht stetig.
Man erkennt sofort, daß die Sinusreihe in diesen Punkten als Summe den Wert 0 besitzt, das Sprungmittel.
Soll sie in diesen Punkten die Werte $f(0)$ bzw. $f(\pi)$ annehmen, so ist das nur unter der Bedingung $f(0)=f(\pi)=0$ möglich.

Analoge Überlegungen gelten natürlich für eine entsprechende nur auf $[0,l]$ gegebene Funktion. Unter den Bedingungen:

f stetig, stückweise glatt und $f(0)=f(l)=0$

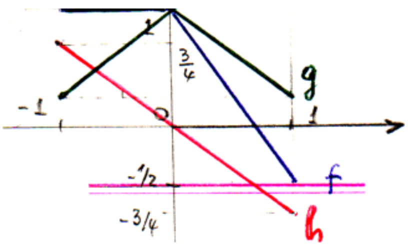
erhält man für die entsprechende Sinusreihe:

$$f(x)=\sum_{n=1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad \text{gleichmäßig auf } [0,l]$$

mit den Koeffizienten $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

Bemerkung: Jede auf $[-\pi,\pi]$ gegebene Funktion f kann als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dargestellt werden:

$$g(x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),\quad h(x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big) \rightsquigarrow f=g+h.$$



$f = g + h$

bel gerade ungerade