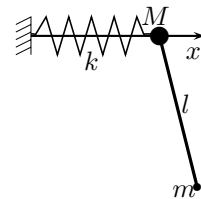


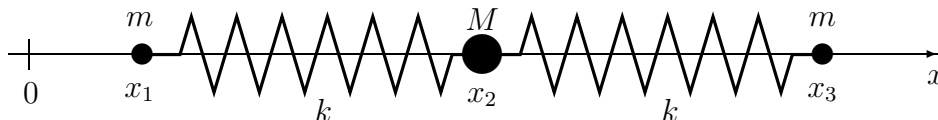
## 10. Übung

1. Ein ebenes mathematisches Pendel (masselose Stange der Länge  $l$ ) mit der Masse  $m$  ist an einem Teilchen der Masse  $M$  angebracht, das sich reibungsfrei entlang der Horizontalen ( $x$ -Achse) bewegen kann. Ausserdem ist die Masse  $M$  an einer (horizontalen) Feder (Federkonstante  $k$ ) befestigt.



- (a) Bestimmen Sie die zugehörige LAGRANGE-Funktion.
- (b) Wie lauten die LAGRANGE-Gleichungen für dieses System?
- \* (c) Linearisieren Sie diese Gleichungen unter der Annahme *kleiner* Ausschläge des Pendels. Bestimmen Sie für den *speziellen* Fall, dass  $M = 3m$  und  $m = kl/4g$  gilt, die Fundamentallösungen des Systems (d.h., die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Amplitudenverhältnisse). Wie lautet dann die allgemeine Lösung des Bewegungsproblems? *Hinweis:* Vor Rechnung gegebene Werte für  $M$  und  $m$  einsetzen!

2. Als Modell für die longitudinalen Schwingungen eines symmetrischen dreiatomigen Moleküls betrachten wir drei durch zwei gleiche (lineare) Federn (Federkonstante  $k$ ) gekoppelte Massen ( $m, M, m$ ), die sich (eindimensional) entlang der  $x$ -Achse bewegen können. Der Gleichgewichtsabstand der Atome sei  $x_2^o - x_1^o = x_3^o - x_2^o = a$ . Geben Sie die LAGRANGEfunktion des Systems an, wobei als Koordinaten die Auslenkungen  $q_i = x_i - x_i^o$  gewählt werden sollen. Wie lauten die zugehörigen LAGRANGEgleichungen für das System? Finden Sie die Normalkoordinaten sowie die allgemeine Lösung für das System. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.



- \*3. Zeigen Sie, dass die zu der LAGRANGEfunktion  $\mathcal{L} = T - q(U - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$  eines Teilchens (Masse  $m$ , Ladung  $q$ ) gehörenden LAGRANGEgleichungen die Bewegungsgleichungen einer Ladung im elektromagnetischen Feld  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  liefern.

*Hinweis:* Der Zusammenhang zwischen den Feldern  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und den Potentialen  $U$ ,  $\vec{A}$  lautet:

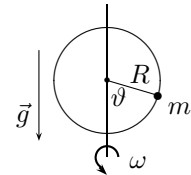
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A}(\vec{r}, t); \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

(bitte wenden)

**Hausaufgabe (Abgabe in Vorlesung am 18.6.)**

**(Bitte versehen Sie Ihre Hausaufgabe mit Ihrer Matrikelnummer!)**

Eine Perle der Masse  $m$  gleite reibungslos auf einem Drahring vom Radius  $R$ . Der Drahring rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seinen Durchmesser im Schwerfeld der Erde.



- (a) Formulieren und klassifizieren Sie die auftretenden Zwangsbedingungen.
- (b) Wie lautet die LAGRANGESche Bewegungsgleichung der Perle?
- (c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für  $\vartheta \ll 1$ .