

Lösung zur 1. Übung

1. (a) Wegen der Orthonormalität der Basis gilt:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

- $\vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 0$
- $(7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3) \cdot (2\vec{e}_3 - 15\vec{e}_2) = 10$
- $(2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3) \cdot (10\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3) = 0$

(b) Wir stellen die Vektoren durch einspaltige Matrizen dar, deren Elemente die Komponenten der Vektoren relativ zu einer Basis bedeuten. Hier wählen wir die drei Vektoren selbst als Basis, also z.B.:

$$\vec{e}_1 \rightarrow \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 \rightarrow \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 \rightarrow \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um die Regel für die Skalarproduktbildung durch die Regel der Matrizenmultiplikation zu realisieren, muss der jeweils erste Faktor durch die sog. *transponierte* Matrix (also eine einzeilige Matrix) dargestellt werden:

- $\underline{e}_2^T \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = (0, 1, 0) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
- $(7, 0, 5) \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$
- $(2, 4, -6) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 20 + 16 - 36 = 0$

(c) Aus der Definition des Skalarproduktes folgt für den Winkel  $\alpha$  zwischen den Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

Mit  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3) = 10$  und  $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$ ,  
 $b = |\vec{b}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$  folgt

$$\alpha = \arccos \frac{10}{\sqrt{20 \cdot 26}} = \arccos 0.4385 = 63.99^\circ$$

Für den gesuchten Vektor  $\vec{c}$  machen wir den Ansatz  $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ ; die Komponenten  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind aus den geforderten Bedingungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{a} &= c_1 + 5c_2 = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} &= 2c_2 - 4c_3 = 0\end{aligned}$$

Das sind *zwei* algebraische Gleichungen für die *drei* unbekanntenen Komponenten von  $\vec{c}$ ; wir können also nur Verhältnisse zwischen den Komponenten bestimmen, z.B.:

$$c_1 = -5c_2; \quad c_3 = \frac{1}{2}c_2; \quad c_2 \text{ -- beliebig!}$$

Wir setzen speziell:  $c_2 = +2 \implies c_1 = -10; \quad c_3 = +1$ .

Man überzeugt sich leicht, dass dieses  $\vec{c}$  zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal ist. Natürlich erfüllt *jeder* zu  $\vec{c}$  parallele Vektor  $\alpha\vec{c}$  (mit beliebigem  $\alpha$ ) die geforderten Bedingungen.

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren ermöglicht uns einen *alternativen Lösungsweg*, da es senkrecht auf den beiden Faktorvektoren steht. Wir nehmen an, dass unsere drei Einheitsvektoren ein Rechtssystem bilden (dann gilt:  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ , und die daraus durch zyklische Indexvertauschung hervorgehenden Relationen) und erhalten:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \times (2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3) = 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_2 - 20\vec{e}_1$$

Dieser Vektor ist zu dem oben bestimmten parallel.

2.  $\tau = T + T_s$ ; mit  $T$  - Fallzeit des Steins für die Strecke  $h$ ,  $T_s$  - Laufzeit des Schalls auf der Strecke  $h$ ;

$T_s = h/c$  - gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $c$ ;

Der Fall des Steins ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung (Fallbeschleunigung  $g$ ) mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit (entlang der  $z$ -Achse, beginnend bei  $z = 0$ ); die Orts-Zeitfunktion  $z(t)$  erhält man durch zweimaliges Integrieren aus der Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\ddot{z}(t) &= g \implies \dot{z}(t) = gt \implies z(t) = gt^2/2; \quad z(t=T) = h \implies T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \implies \tau &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c}\end{aligned}$$

Das kann man als quadratische Gleichung für  $\sqrt{h}$  schreiben, deren positive Lösung wir aufsuchen:

$$(\sqrt{h})^2 + 2 \frac{c}{\sqrt{2g}} \sqrt{h} - \tau c = 0; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{h} = -\frac{c}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{c^2}{2g} + \tau c}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{(\sqrt{c^2 + 2gcr} - c)^2}{2g}}$$

3. Gegeben ist die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \vec{e}'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \vec{e}'_2 \equiv x' \vec{e}'_1 + y' \vec{e}'_2 \quad (1)$$

(a) Fassen wir die Terme mit gleichen trigonometrischen Funktionen in (1) zusammen, so wird

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2) a_1 \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2) a_2 \sin \omega t$$

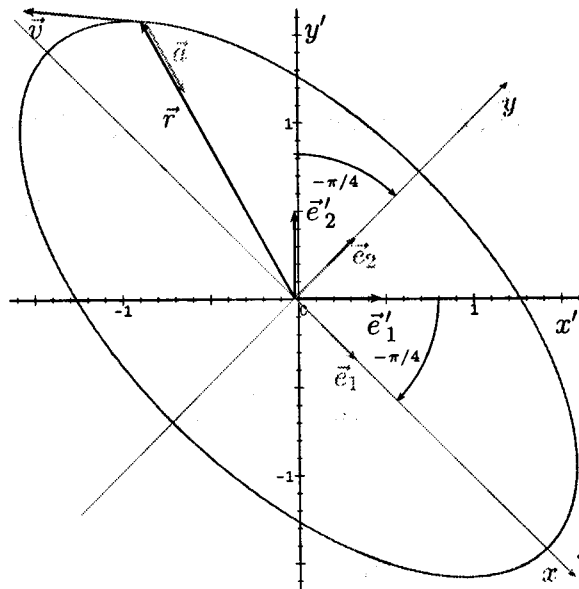
Führen wir die *neuen orthonormalen Basisvektoren*

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2)$$

ein, so vereinfacht sich die Darstellung der Bahnkurve zu

$$\vec{r}(t) = a_1 \cos \omega t \vec{e}_1 + a_2 \sin \omega t \vec{e}_2 \equiv x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 \quad (2)$$

*Bem.:* Die neuen Basisvektoren gehen aus den alten durch eine Drehung um die z-Achse ( $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$ ) um den Winkel  $-\frac{\pi}{4}$  hervor.



Die Komponenten des Ortsvektors  $x'_j = \vec{e}'_j \cdot \vec{r}$  transformieren sich dann auf  $x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r}$  gemäß (man beachte die *Summenkonvention*, nach der über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren ist)

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}'_j x'_j) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j) x'_j \equiv \alpha_{ij} x'_j \quad \text{oder in Matrixschreibweise: } \underline{x} = \underline{\alpha} \underline{x}'$$

mit der *Transformationsmatrix*  $\alpha_{ij}$ , deren  $i$ -te Zeile die Richtungskosinuse des Basisvektors  $\vec{e}_i$  zu den Basisvektoren  $\vec{e}'_j$  bedeutet. Für die oben angegebene Drehung lautet  $\alpha_{ij}$

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2) \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega t \\ a_2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Eliminieren wir den Parameter  $\omega t$  aus der Darstellung (2), dann ergibt sich

$$x = a_1 \cos \omega t, \quad y = a_2 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 = 1} \quad (3)$$

Das stellt eine Ellipse um den Ursprung mit den Halbachsen  $a_1$  und  $a_2$  dar. (siehe auch: *Praktisches Rechnen, Kegelschnitte*)

(c) Mit (2) erhalten wir

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \omega t + a_2^2 \sin^2 \omega t}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \omega(-a_1 \sin \omega t \vec{e}_1 + a_2 \cos \omega t \vec{e}_2)$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \omega \sqrt{a_1^2 \sin^2 \omega t + a_2^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -\omega^2(a_1 \cos \omega t \vec{e}_1 + a_2 \sin \omega t \vec{e}_2)$$

$$\text{also } \boxed{\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \omega^2 r(t)$$

*Bem.:* Die eingerahmte Relation stellt die Bewegungsgleichung eines 3-dimensionalen harmonischen Oszillators dar.

(d) Allgemein ist  $\dot{r}(t) = \frac{d}{dt} |\vec{r}(t)| \neq |\dot{\vec{r}}(t)|$ , denn

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{2r} 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} = |\dot{\vec{r}}(t)| \cos \angle(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \neq |\dot{\vec{r}}(t)|$$

Das Ungleichheitszeichen gilt, da i.a.  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  nicht parallel sind.

Für unser Beispiel wird

$$\dot{r}(t) = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} = \frac{\omega(a_2^2 - a_1^2) \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \omega t + a_2^2 \sin^2 \omega t}} \neq |\dot{\vec{r}}(t)| = \omega \sqrt{a_1^2 \sin^2 \omega t + a_2^2 \cos^2 \omega t}$$

\* (e) Um  $\omega t$  in (1) zu eliminieren, lösen wir die Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t &= \sqrt{2} x' \\ -a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t &= \sqrt{2} y' \end{aligned}$$

nach  $\cos \omega t$  und  $\sin \omega t$  auf; Addition und Subtraktion beider Gleichungen (oder die CRAMERSche Regel) liefern

$$\cos \omega t = \frac{1}{\sqrt{2} a_1} (x' - y'), \quad \sin \omega t = \frac{1}{\sqrt{2} a_2} (x' + y')$$

Addition der Quadrate beider Ausdrücke liefert

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = \frac{1}{2a_1^2} (x' - y')^2 + \frac{1}{2a_2^2} (x' + y')^2 = 1$$

$$\Rightarrow (a_1^2 + a_2^2) x'^2 + 2(a_1^2 - a_2^2) x' y' + (a_1^2 + a_2^2) y'^2 = 2a_1^2 a_2^2$$

Also lautet die gewünschte Darstellung (mit  $\underline{x}^T = (x'_1, x'_2)$ ; die dritte Komponente spielt keine Rolle; in  $\hat{A}$  bestünden die dritte Zeile und Spalte aus Nullen)

$$\underline{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}}_{\equiv \hat{A}} \underline{x}' = 2a_1^2 a_2^2 \quad (4)$$

*Diagonalisieren* (Hauptachsentransformation) von  $\hat{A}$ :

Die Relation

$$\hat{A} \vec{e} = \lambda \vec{e} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

- mit dem *Eigenvektor*  $\vec{e}$  und dem *Eigenwert*  $\lambda$  - stellt ein lineares homogenes algebraisches Gleichungssystem für die Komponenten  $e_i$  von  $\vec{e}$  (relativ zur Basis  $\vec{e}'_i$ ) dar, das nur dann von Null verschiedene Lösungen hat, falls seine Koeffizientendeterminante verschwindet, falls also

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 - \lambda & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1^2 + a_2^2 - \lambda)^2 - (a_1^2 - a_2^2)^2 = 0$$

Auflösen nach  $\lambda$  liefert die beiden Eigenwerte

$$(a_1^2 + a_2^2 - \lambda) = \pm (a_1^2 - a_2^2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_I = 2a_2^2, \quad \lambda_{II} = 2a_1^2$$

Setzen wir die beiden Eigenwerte nacheinander in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir für die Eigenvektoren (*Beachte*: Wegen der verschwindenden Koeffizientendeterminante sind die beiden Gleichungen in (5) nicht mehr linear unabhängig voneinander; es kann eine gestrichen werden; somit lassen sich nur noch die Komponentenverhältnisse bestimmen. Als Zusatzbedingung fordern wir, dass die Eigenvektoren normiert seien.)

$$\begin{aligned} (a_1^2 - a_2^2) e_1^{(I)} + (a_1^2 - a_2^2) e_2^{(I)} &= 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^{(I)} = -e_1^{(I)} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2) = \vec{e}_1 \\ (a_2^2 - a_1^2) e_1^{(II)} + (a_1^2 - a_2^2) e_2^{(II)} &= 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^{(II)} = e_1^{(II)} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}^{(II)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2) = \vec{e}_2 \end{aligned}$$

*Diskussion:*

Wir sehen, dass die Eigenvektoren von  $\hat{A}$  mit den in (a) gefundenen neuen Basisvektoren  $\vec{e}_i$  identisch sind.

Wählt man nun die Eigenvektoren als neue Basis, so geht die Gleichung der Bahnkurve (4) über in

$$\underline{x}^T \begin{pmatrix} 2a_2^2 & 0 \\ 0 & 2a_1^2 \end{pmatrix} \underline{x} = 2a_1^2 a_2^2, \quad (6)$$

wobei die  $\underline{x}$  nun die Komponenten  $(x, y)$  des Ortsvektors relativ zur Basis der Eigenvektoren ( $\vec{e}^{(I)} = \vec{e}_1, \vec{e}^{(II)} = \vec{e}_2$ ) enthalten; damit wird

$$\Rightarrow 2a_2^2 x^2 + 2a_1^2 y^2 = 2a_1^2 a_2^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1}$$

also wieder (3) aus (b).

Die Hauptachsentransformation stellt also die systematische Methode zur Vereinfachung bilinearer Ausdrücke dar; die in (a) intuitiv gefundenen Basisvektoren sind die Eigenvektoren der den bilinearen Ausdruck definierenden Matrix.

*Begründung von (6):*

Von der Darstellung der Bahnkurve (4) relativ zur Basis  $\vec{e}'_i$

$$c = x'_i A'_{ij} x'_j \Rightarrow c = (\vec{r} \cdot \vec{e}'_i) A'_{ij} (\vec{e}'_j \cdot \vec{r}) \Rightarrow c = \vec{r} \cdot (A'_{ij} \vec{e}'_i \circ \vec{e}'_j) \cdot \vec{r}$$

gelangen wir durch Definition des Tensors  $\hat{A} \equiv A'_{ij} \vec{e}'_i \circ \vec{e}'_j$  (wobei  $\circ$  das dyadische Produkt zweier Vektoren bezeichnet) zur koordinatenfreien Darstellung unserer Kurve

$$c = \vec{r} \cdot \hat{A} \cdot \vec{r} \quad (7)$$

Das ist die allgemeine Form einer sog. *Kurve zweiter Ordnung*, die ihre einfachste Darstellung relativ zu dem Basissystem hat, in dem  $\hat{A}$  nur Diagonalelemente - nämlich die Eigenwerte - enthält; die zu dieser Basis gehörigen Basisvektoren sind die Eigenvektoren von  $\hat{A}$ .

Stellen wir den Ortsvektor nun in der Basis der Eigenvektoren ( $\vec{e}_1 = \vec{e}^{(I)}, \vec{e}_2 = \vec{e}^{(II)}$ ) dar, also  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$ , so folgt mit der Eigenwertgleichung (5) aus (7) (zur Sicherheit schreiben wir Summen explizit)

$$c = \sum_{i,j=1}^2 (x_i \vec{e}_i) \cdot \underbrace{\hat{A} \cdot (\vec{e}_j x_j)}_{=\lambda_j \vec{e}_j} = \sum_{i,j=1}^2 x_i \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{=\delta_{ij}} \lambda_j x_j = \underline{x}^T \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{pmatrix} \underline{x} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i x_i^2 = \lambda_I x^2 + \lambda_{II} y^2$$

also tatsächlich (6).

*Bemerkung:*

Die Matrix der Eigenvektoren  $\alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$ , d.h. die Matrix, deren Zeilen die Komponenten der Eigenvektoren relativ zur Basis  $\vec{e}'_j$  darstellen, ist die Transformationsmatrix für Vektoren (und Tensoren) von der Basis  $\vec{e}'_j$  auf die Basis  $\vec{e}_i$  der Eigenvektoren, gemäss

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j) x'_j = \alpha_{ij} x'_j; \quad \underline{x} = \underline{\alpha} \underline{x}'$$

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \hat{A} \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (A'_{kl} \vec{e}'_k \circ \vec{e}'_l) \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A'_{kl}$$

das gilt für jeden Tensor zweiter Stufe. Speziell für unser  $\hat{A}$ , dessen Eigenvektoren die neue Basis bilden, ist natürlich (nachrechnen!)

$$A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{pmatrix}$$

(der Punkt unter dem Index  $i$  bedeutet, dass über diesen Index *nicht* zu summieren ist).