

Lösung zur 5. Übung

1. (a) Das zur Kraft $F(x) = -kx + \alpha x^2$ gehörige Potential lautet: $V(x) = \frac{k}{2} x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3$.
Extrema befinden sich bei: $0 = V'(x) = kx - \alpha x^2 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{k}{\alpha}$.
Wegen $V''(x_1 = 0) = k > 0$ und $V''(x_2 = k/\alpha) = -k < 0$ folgt, dass bei $x_1 = 0$ ein (relatives) *Minimum* und bei $x_2 = k/\alpha$ ein (relatives) *Maximum* des Potentials vorliegt. Es ist $V(x_1 = 0) = 0$ und $V(x_2 = k/\alpha) = V_{max} = k^3/6\alpha^2$.
(Siehe auch Abbildung)

$$\text{Energiesatz: } E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3 = \frac{m}{2} v_0^2$$

(Die Gesamtenergie ergibt sich aus der Anfangsbed.: $x(0) = 0, v(0) = v_0$.) Das Teilchen kehrt *nicht* wieder zum Ursprung zurück, falls seine Energie grösser als V_{max} ist, also:

$$\text{keine Rückkehr, falls: } E = \frac{m}{2} v_0^2 \geq V_{max} = \frac{k^3}{6\alpha^2} \Rightarrow v_0 \geq +\sqrt{\frac{k^3}{3m\alpha^2}}$$

Im Falle des anderen Vorzeichens von v_0 kehrt das Teilchen nach Reflexion am Potential (bei einem $x < 0$) *einmal* zurück und läuft dann nach $+\infty$.

- (b) Zur Diskussion der möglichen Bewegungen und der zugehörigen Phasenbahnen schreiben wir den *Energiesatz in dimensionsloser Form*, um die Zahl der unabhängigen Parameter zu reduzieren; die dimensionslosen Grössen definieren wir mit Hilfe von für das Problem charakteristischen Grössen (*)

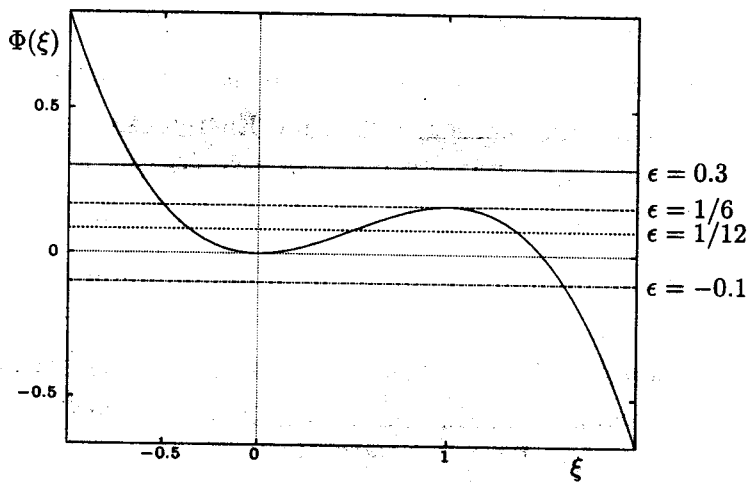
$$x^* = \frac{x}{\alpha}, \quad V^* = \frac{k^3}{\alpha^2}, \quad t^* = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad v^* = \frac{x^*}{t^*} = \sqrt{\frac{k^3}{m\alpha^2}}, \quad \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{x}{x^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad \Phi = \frac{V}{V^*}, \quad \pi = \frac{p}{mv^*} = \frac{v}{v^*} = \frac{d\xi}{d\tau}, \quad \epsilon = \frac{E}{V^*} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{3} \xi^3 = \frac{1}{2} \pi_0^2 = \epsilon}$$

Das ist die implizite Darstellung der Phasenbahnen $\pi = \pi(\xi)$, die sich durch den jeweiligen Wert der Energie ϵ unterscheiden. Wie man an der potentiellen Energie erkennt, gibt es vier verschiedene Bewegungstypen:

- $\epsilon_1 < 0$ einseitig ungebundene Bewegung
 $0 < \epsilon_2 < \Phi_{max} = \frac{1}{6}$ 2 getrennte Lösungen:
 - gebundene Bewegung um $x = 0$;
 - einseitig ungebundene Bewegung
 $\epsilon_3 = \Phi_{max} = \frac{1}{6}$ Separatrix; trennt gebundene von ungebundenen Lösungen;
 vier Lösungen:
 - instabile Gleichgewichtslage
 - ein- und auslaufende Lösung
 - gebundene (aber nichtperiodische) Lösung
 $\epsilon_4 > \frac{1}{6}$ einseitig ungebundene Bewegung

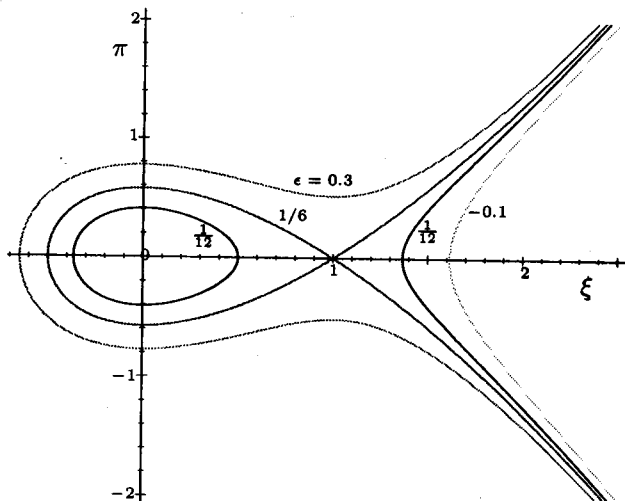


Phasenporträt im Potential

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3$$

für die Energien:

$$\epsilon = 0.3, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -0.1$$



2.

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(x/a)}; \quad V'(x) = -\frac{2V_0 \sinh(x/a)}{a \cosh^3(x/a)}; \quad V''(x) = -\frac{2V_0 (1 - 2 \sinh^2(x/a))}{a^2 \cosh^4(x/a)}$$

Das Potential hat *keine* Nullstelle; $V(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$;

das Extremum liegt bei $x = 0$ mit $V(0) = V_0$, $V''(0) = -2V_0/a^2 \geq 0$, falls $V_0 \leq 0$

(a)

$$V_0 > 0$$

labiles Gleichgewicht bei $x = 0$
Bewegung nur für $E > 0$ möglich
nur ungebundene Bewegung

$0 < E < V_0$ 2 getrennte einseitig ungebundene Bewegungen

$E = V_0$ Separatrix;
3 Lösungstypen: instabiles Gleichgewicht, ein- und auslaufende Bewegung

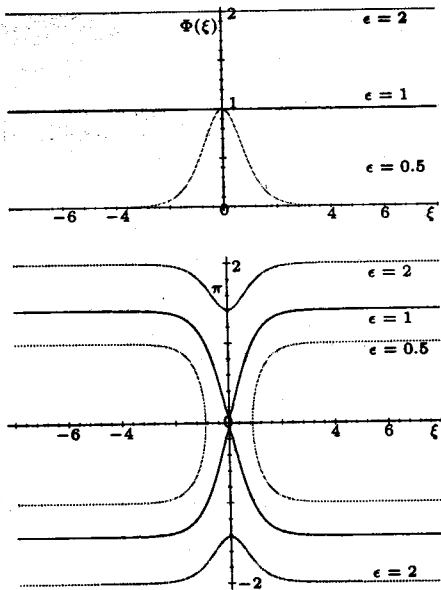
$E > V_0$ beidseitig ungebundene Bewegung

$$V_0 < 0$$

stabiles Gleichgewicht bei $x = 0$
Bewegung nur für $E > V_0$ möglich

$V_0 < E < 0$ gebundene Bewegung
 $E \geq 0$ beidseitig ungebundene Bewegung

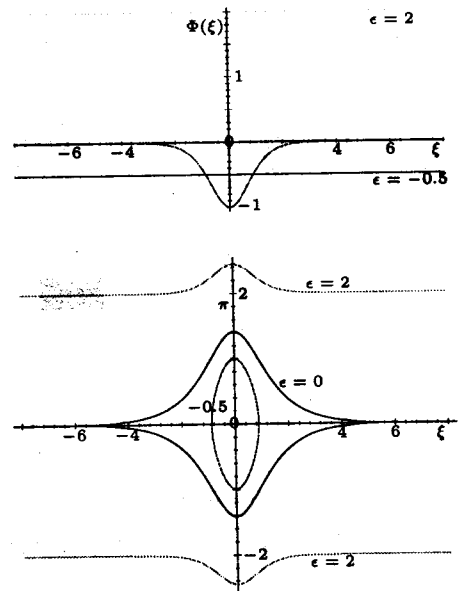
Dimensionslose Darstellung: $\xi = x/a$; $\Phi = V/|V_0|$; $\epsilon = E/|V_0|$



Phasenporträt im Potential

$$\Phi(\xi) = +\frac{1}{\cosh^2 \xi}$$

für die Energien: $\epsilon = 2, 1, 0.5$



Phasenporträt im Potential

$$\Phi(\xi) = -\frac{1}{\cosh^2 \xi}$$

für die Energien: $\epsilon = 2, 0, -0.5$

(b) Wird der Energiesatz nach \dot{x} aufgelöst und die Trennung der Variablen durchgeführt, so entsteht:

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad dx \gtrless 0 \Rightarrow \int_0^t dt' = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}$$

Wollen wir nun in unserem *symmetrischen* Potential die Schwingungsdauer

berechnen, so integrieren wir von $x' = 0$ bis $x' = A$ (mit A als der Amplitude der Schwingung); die verstrichene Zeit ist dann gerade $T/4$. (Wir bedenken noch, dass $V_0 < 0$ und $E < 0$ sein müssen, wenn wir eine Schwingung erhalten wollen.)

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^A \frac{dx'}{\sqrt{-|E| + \frac{|V_0|}{\cosh^2(x'/a)}}} = 2\sqrt{2m} \int_0^A \frac{dx' \cosh(x'/a)}{\sqrt{|V_0| - |E| \cosh^2(x'/a)}}$$

Wir substituieren nun: $u = \sinh(x'/a) \Rightarrow du = \cosh(x'/a) d(x'/a)$; weiter gilt $\cosh^2 z = 1 + \sinh^2 z$. Die Amplitude bestimmt sich zu:

$$V(A) = E \Rightarrow \frac{|V_0|}{|E|} = \cosh^2 \frac{A}{a} = 1 + \sinh^2 \frac{A}{a} \Rightarrow u(A) = \sinh \frac{A}{a} = \sqrt{\frac{|V_0|}{|E|} - 1}$$

$$T(E) = 2\sqrt{2ma} \int_0^{u(A)} \frac{du}{\sqrt{|V_0| - |E|(1+u^2)}} = \frac{2\sqrt{2ma}}{\sqrt{|E|}} \int_0^{u(A)} \frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{|V_0|}{|E|}-1}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{\frac{|V_0|}{|E|}-1}}\right)^2}}$$

Weitere Substitution ergibt:

$$z = \frac{u}{\sqrt{\frac{|V_0|}{|E|}-1}} \Rightarrow T(E) = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \arcsin z \Big|_0^1 = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{\pi}{2}$$

Endgültig erhalten wir für die Energieabhängigkeit der Schwingungsdauer

$$T(E) = \pi a \sqrt{\frac{2m}{|E|}}$$

Die Schwingungsdauer ist also *nicht* konstant, wie bei der harmonischen Schwingung, sondern hängt von der Energie und damit von der Schwingungsamplitude ab. Für kleine Schwingungen, also für $A \ll a \Leftrightarrow |E| \gtrsim |V_0|$ erhalten wir das Resultat von (c).

Bemerkung für Enthusiasten: Das Bewegungsproblem in diesem Potential lässt sich mit der Integration über den Energiesatz vollständig lösen.

- * (c) Stabiles Gleichgewicht bei $x = 0$ nur für $V_0 < 0$, also: $V(x) = -\frac{|V_0|}{\cosh^2(x/a)}$
TAYLOREntwicklung von $V(x)$ um $x = 0$ bis zum quadratischen Term (linearer Term verschwindet am Gleichgewichtspunkt!):

$$V(x) \approx V(0) + \frac{1}{2} V''(0) x^2 = -|V_0| + \frac{|V_0|}{a^2} x^2 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{V''(0)}{m} x \text{ (harmon. Oszillator)}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{V''(0)}{m}} = \sqrt{\frac{2|V_0|}{ma^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi a \sqrt{\frac{2m}{|V_0|}}$$

Die Bewegung stellt in diesem Falle also eine *harmonische Schwingungen* um $x = 0$ dar; die Näherung ist nur gerechtfertigt für *kleine Auslenkungen* aus der Gleichgewichtslage, d.h. für $|x| \ll a$ (a ist die einzige Vergleichslänge in unserem Problem!)

3. (a) Die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = a \frac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ ist eine konservative Zentralkraft; Drehimpuls und Energie sind also Erhaltungsgrößen. Das Potential ist:

$$V(r) = - \int F(r) dr = \frac{a}{n-1} r^{-n+1} \quad \text{für } n \neq 1; \quad \text{für } n = 1: V(r) = -a \ln r + C$$

Der Energiesatz liefert unter Verwendung des Drehimpulssatzes ($L = mr^2\dot{\phi} = \text{const.}$)

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{n-1} r^{-n+1} \equiv \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{V}_{\text{eff}}(r)$$

Stabile Kreisbahnen (d.h. $r(t) = r_*$, $\forall t$) sind immer dann möglich, wenn das Effektivpotential $\tilde{V}_{\text{eff}}(r)$ bei $r = r_*$ ein *Minimum* besitzt (und die Energie E gleich dem Wert des Effektivpotentials im Minimum ist); also muss gelten:

$$\tilde{V}'_{\text{eff}}(r_*) = -\frac{L^2}{mr^3} - ar^{-n} \Big|_{r=r_*} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{ma} = r_*^{3-n}$$

Eine Lösung für $r_* > 0$ kann nur existieren, falls $a < 0$; dann wird

$$r_* = \left(\frac{L^2}{m|a|} \right)^{\frac{1}{3-n}}$$

Damit es sich um ein Minimum handelt, muss die zweite Ableitung von $\tilde{V}_{\text{eff}}(r)$ bei r_* grösser als Null sein:

$$\tilde{V}''_{\text{eff}}(r_*) = \frac{3L^2}{mr^4} - n|a|r^{-n-1} \Big|_{r=r_*} = \frac{|a|}{r_*^{n+1}} \left(\frac{3L^2 r_*^{n-3}}{m|a|} - n \right) = \frac{|a|}{r_*^{n+1}} (3-n) > 0$$

(Hier haben wir das oben erhaltene r_* eingesetzt.)

Stabile Kreisbahnen sind also nur für $n < 3$ möglich.

$n = 2$ liefert die Gravitationskraft und $n = -1$ den dreidimensionalen harmonischen Oszillator.

Man überzeugt sich leicht, dass alle Überlegungen auch für den Fall $n = 1$ gelten.

4. (a) Wir müssen zeigen, dass $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$ ist.

Mit $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{L}} = 0$ (Zentralkraft), $\dot{\vec{p}} = \vec{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \vec{r}} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ und $\dot{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\Lambda} &= \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} + \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\alpha}{|\alpha|} \left(\frac{1}{m\alpha} \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r} \right) \\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|} \left[\frac{\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right) \right] = 0; \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(Hier haben wir noch den Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt benutzt.)

- (b) $\vec{\Lambda}$ liegt ersichtlich *in* der Bewegungsebene. Multiplikation mit \vec{r} liefert, wenn wir den Winkel zwischen $\vec{\Lambda}$ und \vec{r} mit φ bezeichnen und in dem entstehenden Spatprodukt \cdot und \times vertauschen:

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = \Lambda r \cos \varphi = \frac{\alpha}{|\alpha|} \left[\frac{1}{m\alpha} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{L} + r \right] = \frac{L^2}{m|\alpha|} + \frac{\alpha}{|\alpha|} r$$

Auflösen nach r ergibt die gewünschte Bahnkurve.

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{L^2}{m|\alpha|} \frac{1}{\Lambda \cos \varphi - \frac{\alpha}{|\alpha|}}} \quad (1)$$

Das ist die (für $\alpha < 0$) aus der Vorlesung bekannte Formel für die Bahnkurve im $1/r$ -Potential; und zwar *hier* sowohl für den anziehenden Fall ($\alpha < 0$) als auch für den abstossenden Fall ($\alpha > 0$; COULOMBkraft zwischen Ladungen gleichen Vorzeichens). Aus (1) sieht man, dass $\boxed{\Lambda = \epsilon}$ gilt, dass also der *Betrag* von $\vec{\Lambda}$ gleich der *Exzentrizität* der Bahn ist, und dass $r_{\min} = r(\varphi = 0)$ ist, $\vec{\Lambda}$ also zum *zentrumsnächsten* Punkt zeigt und damit *parallel zur grossen Halbachse* der Bahn gerichtet ist.

Für $\alpha < 0$ (*Anziehung*) ergeben sich bekanntermassen je nach Grösse von Λ Ellipsen ($\Lambda < 1$), Parabeln ($\Lambda = 1$) oder Hyperbeln ($\Lambda > 1$; und zwar deren *zentrumsnaher* Ast). Für $\alpha > 0$ (*Abstossung*) ist nur $\Lambda > 1$ möglich; die Bahn ist eine Hyperbel (und zwar deren *zentrumsferner* Ast).

Wir haben also aus der Kenntnis der Erhaltungsgrössen \vec{L} und $\vec{\Lambda}$ die Bahnkurve *ohne* direkte Integration ermittelt.

Erhaltungsgrössen ersparen also direktes Integrieren!

Bem.: Die Energieerhaltung ist in der Konstanz von L und Λ enthalten, denn es ist ja $\Lambda = \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2} E}$; was man natürlich auch durch direkte Berechnung von Λ erhalten kann.