

Lösung zur 6. Übung

1. (a) Dadurch kann das Raumschiff schon die Bahngeschwindigkeit  $v_E$  der Erde um die Sonne als Beitrag zur Einschussgeschwindigkeit in die elliptische Flugbahn nutzen. Es gilt für eine kreisförmige Umlaufbahn der Erde um die Sonne mit der Periode  $T_E$  ( $\epsilon_E = 0.017$ )

$$v_E = \omega_E R_E = \frac{2\pi}{T_E} R_E \approx 30 \text{ km/s} \quad \text{mit} \quad T_E = 1a.$$

- (b) Die Flugbahn sei eine KEPLERellipse ( $\epsilon < 1$ )

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

mit

$$k = \frac{L^2}{\gamma M m^2} \quad \text{und} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}}. \quad (1)$$

Für die Bahnkurve soll gelten:

$$r(0) = R_E = \frac{k}{1 + \epsilon},$$

$$r(\pi) = R_U = \frac{k}{1 - \epsilon}.$$

Daraus folgt für  $\epsilon$  und  $k$

$$\epsilon = \frac{R_U - R_E}{R_U + R_E} = 0.9,$$

$$k = R_E (1 + \epsilon) = 1.9 \text{ AU}.$$

Die grosse und kleine Halbachse der Ellipse bestimmen sich zu

$$a = \frac{k}{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{2} (R_E + R_U) = 10.1 \text{ AU},$$

$$b = \frac{k}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = a \sqrt{1 - \epsilon^2} = 4.4 \text{ AU}.$$

- (c) Aus Gl. 1 folgt für die Energie der Bewegung

$$E = -\frac{\gamma m M}{2a} = \frac{m}{2} v(r)^2 - \frac{\gamma m M}{r}.$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich damit

$$v(r) = \sqrt{2\gamma M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}} \sqrt{\frac{R_E}{r} \left( 1 - \frac{r}{2a} \right)}.$$

Betrachten wir nun die minimale Fluchtgeschwindigkeit eines Raumschiffes aus dem Gravitationsbereich der Sonne, wenn das Schiff den anfänglichen Abstand  $R_E$  zur Sonne hat. Es gilt

$$E = \frac{m}{2} v_{\text{Fl}}^2 - \frac{\gamma m M}{R_E} = 0,$$

daraus folgt

$$v_{F1} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}} = \sqrt{2}v_E \approx 42\text{km/s},$$

und damit

$$v(r) = v_{F1} \sqrt{\frac{R_E}{r} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)}.$$

Für die notwendige Einschussgeschwindigkeit im Perihel der Ellipsenbahn folgt mithin

$$v_p = v(R_E) = v_{F1} \sqrt{1 - \frac{R_E}{2a}} = v_{F1} \sqrt{\frac{R_U}{R_E + R_U}} \approx 41\text{km/s}.$$

Beim Start in Richtung des Erdumlaufs muss dem Schiff somit die Zusatzgeschwindigkeit  $\tilde{v}_p = v_p - v_E \approx 11\text{km/s}$  erteilt werden. Hinzu kommt noch die zusätzliche Anfangsgeschwindigkeit  $v_{F1}^E$  um die Erdanziehung zu überwinden:

$$v_{F1}^E = \sqrt{\frac{2\gamma M_E}{r_E}} = \sqrt{2gr_E} \approx 11\text{km/s}$$

( $r_E$  - Erdradius,  $M_E$  - Erdmasse,  $g$  - Erdbeschleunigung).

Die Flugdauer  $\tau$  bis zum Uranus erhalten wir aus dem 3. Keplerschen Gesetz:

$$\tau = \frac{T_{RS}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_E}\right)^{3/2} T_E \approx 16a.$$

*Bemerkung:* Die Flugdauer lässt sich bei äquivalentem Energieaufwand um 11 Jahre verkürzen, indem eine durch das Gravitationsfeld des Jupiter unterstützte Bahnkurve ("swingby") gewählt wird (s. Greiner: Mechanik I, S. 346ff).

2. (a) Die (eindimensionale) Impulsbilanz bei äusserer Kraft  $-mg$  (Bewegungsglg.) lautet

$$\frac{dp}{dt} = -mg \quad \Rightarrow \quad dp = -mg dt;$$

wobei  $dp$  die Änderung des Gesamtimpulses (Rakete *und* in  $dt$  ausgestossene Verbrennungsgase) bedeutet. Aus dieser Impulsbilanz versuchen wir die Bewegungsglg. für die Rakete allein zu gewinnen:

$$\underbrace{m(t+dt)v(t+dt)}_{\text{Impuls Rakete zu } t+dt} + \underbrace{|dm|(v(t) - v_g)}_{\substack{\text{Gasgeschw.} \\ \text{im Inertialsystem}}} - \underbrace{m(t)v(t)}_{\substack{\text{Impuls} \\ \text{Rakete} \\ \text{zu } t}} = -mg dt$$

Impuls  
des ausgestossenen Gases  
 $|dm|$

$$\text{Division durch } dt \Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) + \frac{|dm|}{dt}(v - v_g) = -mg.$$

Nach Anwenden der Produktregel im ersten Term und Beachten von  $dm < 0$ ,  $\mu = -dm/dt$  erhalten wir die Bewegungsgleichung für die Rakete:

$$\boxed{m(t) \frac{dv}{dt} = \underbrace{\mu(t) v_g(t)}_{\text{Schubkraft}} - m(t)g} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\mu(t) v_g(t)}{m(t)} - g.$$

Für den Massenverlust der Rakete in  $dt$  kann man schreiben:  $dm = -\rho_g A v_g dt$ ; woraus für den Zusammenhang zwischen  $\mu$  und  $v_g$  folgt:  $\boxed{\mu = \rho_g A v_g}$ .

- (b) Mit  $-\frac{dm}{dt} = \mu = \text{const}$  erhält man:  $\boxed{m(t) = m_0 - \mu t}$ . Zur Zeit  $t = t^* = \frac{m_0}{\mu}$  ist also die gesamte Raketenmasse "verheizt"; die Beschleunigungsphase kann also höchstens bis  $t = t^*$  dauern; mit dieser charakteristischen Zeit  $t^*$  lässt sich eine *dimensionslose Zeit*  $\tau = t/t^*$  definieren.

Mit dem  $m(t)$  und mit einer konstanten Ausströmgeschwindigkeit  $v_g$  ergibt sich eine Differentialglg. für  $v(t)$  in der Beschleunigungsphase ( $\tau < 1$ ), die direkt integriert werden kann:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t} - g \Rightarrow \int_0^t dt' \frac{dv(t')}{dt'} = \int_0^t dt' \left( \frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t'} - g \right)$$

Mit  $v(0) = 0$  wird

$$\boxed{v(t) = v_g \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt} = v_g \ln \frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_0} t} - g \frac{m_0}{\mu} \frac{\mu}{m_0} t$$

Im letzten Term sehen wir, dass sich eine charakteristische Geschwindigkeit  $v^* \equiv g \frac{m_0}{\mu} = gt^*$  definieren lässt; damit führen wir den Parameter  $\nu \equiv \frac{v_g}{v^*}$  ein und schreiben die *Lösung in dimensionsloser Form*:

$$\frac{v}{v^*} \equiv \boxed{\Phi(\tau) = \nu \ln \frac{1}{1-\tau} - \tau}; \quad \tau < 1$$

Das Verhalten in der *Startphase* erhalten wir für  $\tau \ll 1$ , also:

$$\begin{aligned} \tau \ll 1 \Rightarrow \Phi &\approx \nu \ln(1 + \tau \pm \dots) - \tau \\ &\approx \tau(\nu - 1) + \dots \end{aligned}$$

(Hier haben wir zunächst das Argument des  $\ln$  in eine TAYLORreihe entwickelt und dann den Logarithmus selbst, für den gilt:

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ falls } x \ll 1).$$

Die Geschwindigkeit in der Startphase ist also nur positiv, falls  $\nu > 1$ ; geschrieben in den physikalischen Grössen heisst das:

$$t \ll \frac{m_0}{\mu} : \quad v(t) > 0, \text{ falls } \mu v_g > mg;$$

d.h., die Schubkraft muss grösser als das Anfangsgewicht der Rakete sein.

3. Mit  $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}}$  lautet die mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  multiplizierte Bewegungsgleichung

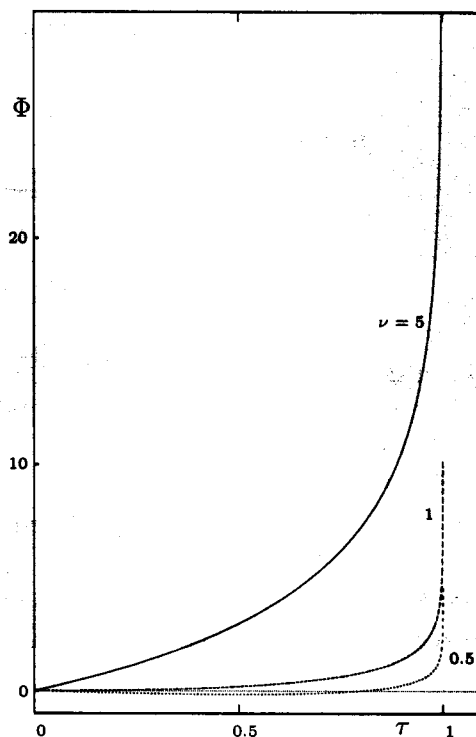
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) \right) = -\dot{\vec{r}}(t) \cdot \frac{\partial V(\vec{r}(t), t)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dV(\vec{r}(t), t)}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r}(t), t)}{\partial t}$$

Damit kann geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t), t) \right) \equiv \frac{d}{dt} E(t) = \frac{\partial V(\vec{r}(t), t)}{\partial t} \quad (2)$$

Die Energie  $E(t)$  ist also *keine* Konstante mehr, sie ändert sich mit der Zeit. Um die rechte Seite angeben zu können, muss man die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  bereits kennen; (2) ist damit *keine* Hilfe bei der Integration der Bewegungsgleichung.

*Bem.:* Die Wegunabhängigkeit des Linienintegrals der Kraft gilt nur noch bei *festgehaltener* Zeit  $t$ .



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm  
(für  $\nu = 5, 1, 0.5$ )