Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

2. Übung

Wiederholungsfragen

1. Wie ist Geschwindigkeit und Beschleunigung definiert?
2. Wie erhalte ich die Tangentenrichtung an eine Bahnkurve, wie die Normalenrichtung?
3. Was ist die Bogenlänge? Wie kann ich diese aus einer parametrisierten Bahnkurve mit einem Linienintegral berechnen?

2.1 Kugelkoordinaten

Die Lage P eines Massenpunktes im dreidimensionalen Raum werde durch den Ortsvektor $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten $\{r, \theta, \varphi\}$ in der Form

$$\vec{r} \;=\; \begin{pmatrix} r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ als Linearkombinationen der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$. Die gesuchten Einheitsvektoren sind dabei jeweils als Tangenten an die Kurven ($\theta =$ const., $\varphi =$ const.), ($r =$ const., $\varphi =$ const.) und ($r =$ const., $\theta =$ const.) definiert.

b) Der Massenpunkt bewege sich. Berechnen Sie die zeitliche Änderung $\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\theta, \dot{\vec{e}}_\varphi$ der Vektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$! Stellen Sie $\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\theta, \dot{\vec{e}}_\varphi$ als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ dar!

c) Berechnen Sie damit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ und Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ in Kugelkoordinaten.

2.2 Bewegung in Polarkoordinaten

Die Bahnkurve eines Massepunktes sei in Polarkoordinaten durch

$$r \;=\; r_0 \mathrm{e}^{kt} \quad \text{und} \quad \varphi = \omega t$$

gegeben, wobei r_0, ω und k konstant sind und $r_0 > 0$ gelten soll. Bestimmen Sie die radialen und azimutalen Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Berechnen Sie daraus die Tangential- und Normalbeschleunigung.

2.3 Vektorielle Differentialgleichung

Zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und dem Ortsvektor gelte der Zusammenhang

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\vec{\omega} = \text{const})\,.$$

Man diskutiere diese Bewegung, *ohne* die Differentialgleichung zu lösen. Welche Bedeutung hat $\vec{\omega}$? Berechnen Sie die Beschleunigung!

2.4 Bogenlänge mittels Linienintegral

Berechnen Sie die Bogenlänge mit Hilfe des Linienintegrals für

1. einen Kreis vom Radius R,
2. ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b,
3. eine Kardioide, die durch ihre Parameterdarstellung in ebenen Polarkoordinaten gegeben sei:

   $$\rho(\varphi) \quad = \quad a(1 + \cos\varphi)\,,$$

   mit $a = const.$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$!