Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

4. Übung

Wiederholungsfragen

1. Wie lauten die Newtonschen Axiome?
2. Was sind die beiden Grundaufgaben der Mechanik?
3. Wieso ist durch die Angabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung vollständig bestimmt?
4. Was ist der Phasenraum in der Mechanik?
5. Welchen Typ von DGLs kann man mit Trennung der Variablen lösen?
6. Was versteht man unter Partialbruchzerlegung.

4.1 Spezielle Kraftgesetze

Lösen Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung für folgendes Kraftgesetz

$$\vec{F} = a\mathrm{e}^{-\gamma t}\vec{e}_x - by\vec{e}_y - c\dot{z}\vec{e}_z \,,$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y + v_0\vec{e}_z$, wobei a, b, c und γ positive Konstanten seien. Wie sieht die Bewegung nach sehr langen Zeiten aus?

4.2 Bewegung im Phasenraum

Ein Körper der Masse m bewegt sich eindimensional mit der Energie E im Potential

$$V(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x^4 \qquad\qquad a, b > 0$$

a) Diskutieren Sie qualitativ den Bewegungsablauf für verschiedene Energien (Skizze!)!

b) Bestimmen Sie den Impuls $p\,(x) = m \cdot v(x)$ in Abhängigkeit vom Ort und stellen Sie $p\,(x)$ in einem $p - x$ - Diagramm grafisch dar. Gehen Sie dabei zu dimensionslosen Größen über, indem Sie den Impuls, den Ort und die Energie in Einheiten messen, die in geeigneter Weise aus den Konstanten a, b und m gebildet werden.
Bemerkung: Die dimensionslose Formulierung eines physikalischen Problems ist z.B. immer dann notwendig, wenn ein Problem numerisch auf einer Rechenanlage gelöst werden soll (also fast immer!), da Computer i.a. nicht mit Maßeinheiten umgehen können.

c) Bestimmen Sie $x(t)$ für die Bewegung des Köpers für den Fall $E = 0$.
Hinweis: $\int dx \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

d) Leiten Sie aus dem Energiesatz eine Integralformel für die Zeit $T(E)$, die der Körper für seine Bewegung zwischen den Umkehrpunkten benötigt, her!

e) Wie groß ist die Schwingungsdauer bei $E_0 = -a^2/(4b)$? Berechnen Sie $T(E_0 + \delta E)$ näherungsweise für Energien die nur wenig größer als E_0 sind!

4.3 Fall mit Reibung

Der freie Fall eines Körpers, der als Massepunkt betrachtet werde, erfolgt unter dem Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und der Luftreibungskraft, die über

$$\vec{F}_L = -\vec{v} \cdot (\beta + \gamma \cdot |\vec{v}|) \,, \qquad\qquad \beta, \gamma > 0, \text{konst.}$$

von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Körpers abhängt.

a) Formulieren Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung in koordinatenfreier Darstellung. Welche Differentialgleichungen müssen demnach die Geschwindigkeitskomponenten v_j in kartesischen Koordinaten erfüllen (Annahme: Fallbeschleunigung $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$) ?

b) Überlegen Sie sich qualitativ, wie die Bewegung abläuft. Wie verhalten sich v_x, v_y und v_z insbesondere für sehr große Zeiten t?

c) Gewinnen Sie aus den Bewegungsgleichungen für v_x und v_y eine Differentialgleichung für die Größe $\eta^2 \equiv v_x^2 + v_y^2$ und untersuchen Sie den Grenzfall $v_z^2 \gg \eta^2$.

d) Für die Anfangsbedingungen $v_x(0) = v_y(0) = 0$ ist $\eta(t) = 0$ eine mögliche Lösung. Lösen Sie die dann noch verbleibende Differentialgleichung für $v_z(t)$ durch Trennen der Variablen mit der Anfangsbedingung $v_z(0) = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie bei der auftretenden Integration die Partialbruchzerlegung des Integranden.