Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

6. Übung

6.1 Der besoffene Astronom :-)

Ein Astronom, der etwas über den Durst getrunken hat, behauptet am Biertisch, einen Himmelskörper beobachtet zu haben, der auf einer logarithmischen Spirale, deren Parameterdarstellung in ebenen Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi) \quad = \quad \rho_0 \mathrm{e}^{-k\varphi}$$

lautet, ins Zentralgestirn stürzte. Desweiteren habe er ermittelt, daß der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

a) Wie müßte die Kraft aussehen, die das Zentralgestirn auf den Körper ausübt, wenn der Astronom recht hätte?

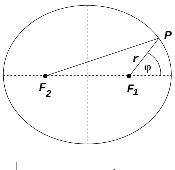
b) Hätte diese Kraft ein Potential, wenn ja welches?

Hinweis: Schreiben Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten und drücken Sie die Ableitungen des Radiusvektors nach der Zeit durch die nach dem Winkel φ, und die Zeitableitungen des Winkels durch den Flächensatz aus.

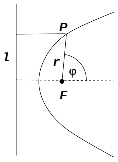
Bemerkung: So was soll vorkommen **;-)** STEFAN BANACH, der Schöpfer der Funktionalanalysis, galt „... als Exzentriker und statt in seinem Büro zu arbeiten, saß Banach meist im örtlichen „Schottischen Café“, um seine Notizbücher mit Ideen zur Funktionalanalysis zu füllen (daher tragen seine Notizen aus dieser Zeit auch den Namen „schottische Notizbücher“).“

6.2 Kegelschnitte

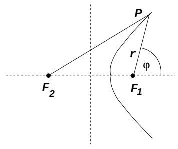
Bestimmen Sie die Abhängigkeit des Radius' vom Winkel $\rho(\varphi)$ in ebenen Polarkoordinaten für eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel, indem Sie die folgenden Eigenschaften benutzen:



Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten) konstant (=2a) ist.



Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zu einem festen Punkt (dem Brennpunkt F) und einer Geraden (der Leitgeraden) gleich ist.



Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten), konstant (=2a) ist.

Der Abstand der Brennpunkte sei für Ellipse und Hyperbel $2a\epsilon$, wobei ϵ die numerische Exzentizität bezeichnet, während bei der Parabel der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt a sei.
Drücken Sie ϵ mit Hilfe des Drehimpulses und der Energie aus (folgen Sie dabei der Vorlesung) für den Fall, daß oben genannte Kurven die Bahn eines Massepunktes im Gravitationsfeld einer sehr großen Punktmasse beschreiben. Was folgt aus den Eigenschaften der numerischen Exzentrizität für die Energie von Körpern auf elliptischen bzw. hyperbolischen Bahnen?

Warum ist der Sonnentag (24h) etwas länger als der Sternentag?

Wie groß ist in etwa die Differenz?

Könnte es auch Planeten geben, bei denen der Sternentag länger ist?

6.3 Kreisbahnen im Zentralpotential

a) Für welche a und n sind in dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a\dfrac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ *stabile* Kreisbahnen möglich?

b*) Bestimmen Sie das Frequenzverhältnis ω_s/ω_0 **kleiner** radialer Schwingungen um eine stabile Kreisbahn, wobei ω_0 die Umlauffrequenz auf der stabilen Kreisbahn bezeichnet. Was bedeutet das speziell für die Fälle $n = 2$ und $n = -1$?

6.4 Apsidendrehung im Zentralpotential (1)

a) Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz für die gebundene Bewegung eines Massenpunktes (Masse m) in einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$.

b) Gewinnen Sie daraus die Bahnkurve in der Form $\varphi(r)$

c*) Zeigen Sie, dass sich der Radiusvektor zwischen zwei zeitlich aufeinander folgenden Zeitpunkten, zu denen der Körper seinen maximalen (oder minimalen) Abstand vom Zentrum erreicht, um einen Winkel $\Delta\varphi$ dreht, der durch

$$\Delta\varphi \;=\; 2\cdot\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr\frac{L/r^2}{\sqrt{2m\,(E-V(r))-L^2/r^2}}$$

gegeben ist.

d*) Zeigen Sie, dass sich für das Potential $V(r) = -\alpha/r$ der Wert $\Delta\varphi = 2\pi$ ergibt. Läßt sich das anschaulich interpretieren?