

Theoretische Mechanik

10. Übung

Wiederholungsfragen

1. Erläutern Sie, auf welche Weise auftretende Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden können.
2. Worin besteht der Unterschied zwischen LAGRANGE - Gleichungen 1. Art und den LAGRANGE - Gleichungen 2. Art?
3. Erläutern Sie anholonome Zwangsbedingungen an einem Beispiel.
4. Was versteht man unter zyklischen Koordinaten? Wie kann man Erhaltungsgrößen aus den LAGRANGE-Gleichungen 2. Art ablesen?
5. Auf welche Weise kann der LAGRANGE-Formalismus auch für nicht-konservative Systeme angewendet werden?

10.1 Mechanische Freiheitsgrade

Charakterisieren Sie für die folgenden Systeme die Art der Zwangsbedingungen, geben Sie die Zahl der mechanischen Freiheitsgrade an und wählen Sie die zur Beschreibung geeigneten generalisierten Koordinaten.

- a) frei im Raum beweglicher starrer Körper
- b) in einem Punkt fixierter starrer Körper
- c) elastisch verformbarer Körper (Kontinuum)
- d) ebenes mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt in vorgegebener Weise horizontal bewegt wird
- e) ebenes mathematisches Pendel, das an einem auf horizontaler Schiene beweglichen Körper befestigt ist
- f) Massenpunkt, der sich innerhalb eines Rohres bewegt, das in einer horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird
- g) kleine Kugel, die unter Einfluß ihres Gewichts von einer großen Kugel herunterrollt
- h) ein Zylinder, der eine raue, geneigte Ebene (Neigungswinkel α) herabrollt.

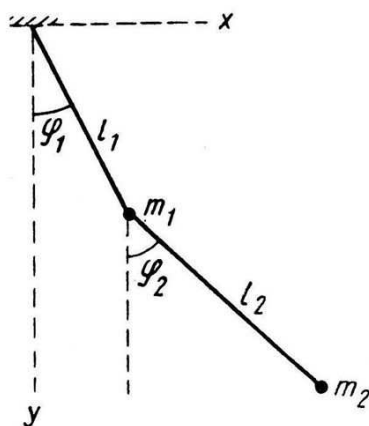
10.2 LAGRANGE-Gleichungen 1. Art

In der vertikalen $x-z$ -Ebene gleite ein Massenpunkt (Masse m) reibungsfrei unter Einfluss der Schwerkraft ($\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$) auf einer Schiene, die entsprechend der Funktion $z = f(x)$ gebogen ist.

- Formulieren Sie die Zwangsbedingung und stellen Sie die LAGRANGE-Gleichungen I. Art in kartesischen Koordinaten für $x(t)$ und $z(t)$ auf.
- Bestimmen Sie die Zwangskraft \vec{Z} in Abhängigkeit von der x -Koordinate und der Geschwindigkeitskomponente \dot{x} .
- Weisen Sie nach, dass die Energie des Teilchens während seiner Bewegung erhalten bleibt.
- Die Schiene habe die Form der nach unten offenen Parabel $z = -\alpha x^2, \alpha > 0$. Untersuchen Sie, ob der Massenpunkt von der Schiene abheben kann, wenn er seine Bewegung auf dem Scheitelpunkt nach einer infinitesimal kleinen Auslenkung aus der Ruhelage heraus beginnt.

10.3 Ebenes Doppelpendel

Als einfaches Modell für eine Glocke werde ein Doppelpendel (Massen m_1, m_2 ; Längen der masselosen Stangen l_1, l_2) betrachtet. Die Massen mögen sich unter dem Einfluss der Gewichtskraft nur in einer Ebene bewegen.



- Führen Sie geeignete generalisierte Koordinaten ein und bestimmen Sie die LAGRANGE-Funktion!. Gewinnen Sie daraus die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art. Von welchem mathematischen Typ sind diese Gleichungen? Welche Form nehmen sie im Grenzfall $m_2 \ll m_1$ an?
- Linearisieren Sie die LAGRANGE-Gleichungen für kleine Amplituden mit den Näherungsannahmen

$$\varphi_k \ll 1 \quad \varphi_k \cdot \varphi_l \ll \varphi_m \quad k, l, m = 1, 2.$$

Bestimmen Sie aus den linearisierten Gleichungen

$$Ml_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + Mgl_1 \varphi_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0$$

($M \equiv m_1 + m_2$) mit den Ansätzen $\varphi_k = A_k \cdot e^{i\omega t}$ ($k = 1, 2$) die Eigenfrequenzen des Systems und geben Sie damit die allgemeinen Lösungen für $\varphi_k(t)$ an. Zur Vereinfachung nehme man $l_1 = l_2 \equiv l$ an.

c) Finden Sie die Lösungen $\varphi_k(t)$ für die Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

und diskutieren Sie deren Zeitverhalten!

10.4 Freier Fall auf rotierender Erde

Stellen Sie die LAGRANGE-Funktion für den freien Fall auf der rotierenden Erde auf, und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.