Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

13. Übung

Wiederholungsfragen

1. Wie sieht der Trägheitstensor eines Massepunktes am Ort $\vec{r}$ bezüglich des Ortes $\vec{r}_O$ aus?
2. Was sagt der Satz von STEINER aus, wozu ist er gut?
3. Wodurch unterscheiden sich die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers im raum- und im körperfesten Bezugssystem?
4. Wie sind die EULERschen Winkel definiert?
5. Was versteht man unter Pol-, Präzessions- und Spurkegel?

13.1 Trägheitstensor und Satz von STEINER

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Quaders der Kantenlängen a, b und c mit $a > b > c$ bezüglich seines Schwerpunktes.

b) Wie a) aber mit $a = b > c$ (quadratisches Prisma)!

c) Wie a) aber mit $a = b = c$ (Würfel)!

d) Berechnen Sie den Radius R und die Höhe h eines Kreiszylinders, der denselben Trägheitstensor bezüglich seines Schwerpunktes aufweist, wie das unter b) berechnete quadratische Prisma.

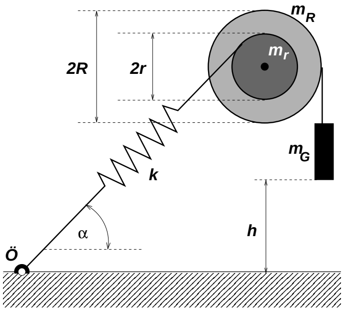
e) Berechnen Sie den Radius R einer Kugel, die denselben Trägheitstensor bezüglich seines Schwerpunktes aufweist, wie der unter c) berechnete Würfel.

f) Berechnen Sie die Trägheitsmomente für die unter a) bis c) berechneten Körper für eine Rotation um die Kanten, für den Kreiszylinder bezüglich einer Rotation um eine parallel zur Symmetrieachse im Zylindermantel liegende Drehachse und für die Kugel für eine den Kugelmantel tangierende Drehachse.

g) Berechnen Sie den Trägheitstensor des unter d) betrachteten Kreiszylinders bezüglich eines Punktes des Körpers, der am weitesten vom Schwerpunkt entfernt ist.

13.2 Drehmoment, Rotationsenergie und Drehschwingung

Betrachtet wird die untenstehende Apparatur, bei der auf einer Welle zwei Seilscheiben mit den Massen m_R bzw. m_r und den Radien R bzw. r auf einer Welle angebracht sind. Am Seil der größeren hängt die Last m_G in der Höhe h über dem Erdboden. Das Seil der kleineren Scheibe ist mittels eine Feder (Federkonstante k) unter dem Winkel α abgespannt. Die Massen der Seile, der Welle und der Feder, sowie Pendelbewegungen der Last können vernachlässigt werden.



a) Bestimmen Sie mit Hilfe des D'ALEMBERTschen Prinzips die Dehnung der Feder!

b) Bestimmen Sie die Drehmomente der Feder bzw. der Last bezüglich der Welle.

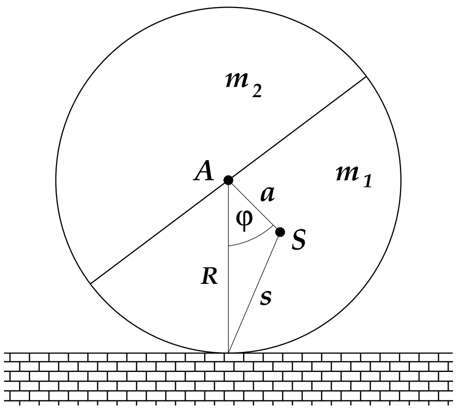
c) Überlegen Sie sich angepaßte generalisierte Koordinaten und bestimmen Sie die LAGRANGE-Funktion!

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenz der Apparatur.

e) Zum Zeitpunkt t_0, das System befinde sich zu diesem Zeitpunkt in Ruhe, wird das Seil zwischen Feder und Seilscheibe zerschnitten. Wann und mit welcher Geschwindigkeit schlägt die Last am Boden auf?

13.3 Rollpendel

Ein aus zwei Halbzylindern verschiedener Massendichten (Massen m_1, m_2) zusammengesetzter Zylinder (Radius R), dessen Schwerpunkt **S** sich außerhalb der Symmetrieachse **A** befindet, rollt (ohne zu rutschen) auf einer ebenen Unterlage.



a) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Körpers, indem Sie einmal die momentane Drehachse und einmal die Drehachse durch den Schwerpunkt als Bezugsachse wählen!

b) Geben Sie die LAGRANGE - Funktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ an, wobei als verallgemeinerte Koordinate der Winkel φ zwischen der Vertikalen und dem Lot vom Schwerpunkt auf die Zylinderachse **A** benutzt wird!

c) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

d) Zeigen Sie, dass bei der tiefsten Lage des Schwerpunktes ein stabiles Gleichgewicht, bei seiner höchsten Lage ein labiles Gleichgewicht vorliegt! Bestimmen Sie die Frequenz der harmonischen Schwingungen, die der Zylinder für kleine Winkel $\varphi \ll 1$ um das stabile Gleichgewicht ausführt!

13.4 Freie Achsen

In der Vorlesung wurde die Rotation des starren Körpers um freie Achsen besprochen. Weisen Sie analytisch nach, dass die kräftefreie Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments stets instabil ist. Gehen Sie dabei von dem Ansatz

$$\omega_1 \approx \omega_0 = \text{konst.} \qquad \omega_2 \ll \omega_0 \qquad \omega_3 \ll \omega_0$$

aus. Setzen Sie diesen in die kräftefreien EULERschen Gleichungen ein, vernachlässigen Sie die in ω_2 und ω_3 quadratischen Terme und gewinnen Sie damit die Differentialgleichungen

$$\ddot{\omega}_2 + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_2 = 0 \qquad \ddot{\omega}_3 + F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot \omega_3 = 0.$$

Diskutieren Sie anschließend das Vorzeichen der Größe F.