Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

3. Übung Lösungen

3.1 Gebremstes Fahrzeug

Ein Fahrzeug (Masse m) bewegt sich geradlinig unter dem Einfluß einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft $F_R = -m \cdot \gamma \cdot \dot{x}$. Er beginnt seine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 am Ort x_0.

a) Stellen Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung auf, und bestimmen Sie daraus $x(t)$ und $v(t)$ und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen!

$$m\dot{v} \quad = \quad -m \cdot \gamma \cdot v$$

Mittels TdV und der Anfangsbedingung für v findet man

$$v(t) \quad = \quad v_0 \, \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich mit der Anfangsbedingung für x

$$x(t) \quad = \quad x_0 + \frac{v_0}{\gamma} \left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right)$$

b) Bestimmen Sie, an welchem Punkt x_1 der Körper zur Ruhe kommt.

$$x_1 = x(t \to \infty) \quad = \quad x_0 + \frac{v_0}{\gamma}$$

Zu welchem Zeitpunkt t_1 hat der Körper die Strecke $s = (x_1 - x_0)/2$ zurückgelegt?

$$t_1 \quad = \quad \frac{\ln 2}{\gamma}$$

Berechnen Sie die Arbeit, die von der Reibungskraft verrichtet wurde, wenn der Körper den Ort $x = x_0 + s$ erreicht hat!

Zunächst die Arbeit als Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned} W(x(t)) &= \int_{x_0}^{x} dx' F_R = \int_0^t F_R \frac{dx'}{dt'} \, dt' = \int_0^t F_R v \, dt' \\ &= -m\,\gamma \int_0^t v^2 \, dt' = -\gamma m v_0^2 \int_0^t \mathrm{e}^{-2\gamma t} \, dt' = \frac{m\, v_0^2}{2} \left(\mathrm{e}^{-2\gamma t} - 1\right) < 0 \end{aligned}$$

Speziell

$$W(x_0+s) \;=\; W(t_1) = \frac{m\,v_0^2}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\gamma\,t_1}-1\right) = \frac{m\,v_0^2}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\ln 2}-1\right) = -\frac{3}{4}\frac{m\,v_0^2}{2}$$

c) Drücken Sie die Leistung der Reibungskraft mit Hilfe der Kraft und der Geschwindigkeit aus und berechnen Sie diese in Abhängigkeit von der Zeit!

$$P(t) \;=\; \dot{W} = \frac{dW}{dt} = \frac{F_R dx}{dt} = F_R\,v = -m\,\gamma v^2$$

Wie groß ist die mittlere Leistung in der Zeitspanne, die das Fahrzeug zum Zurücklegen der Strecke s braucht?

$$\bar{P} \;=\; \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1} P(t)dt = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dW}{dt}\,dt = \frac{W(t_1)-W(0)}{t_1} = -\frac{3}{4\ln 2}\gamma\,\frac{m\,v_0^2}{2}$$

3.2 Herabgleitendes Seil

Ein ausgestrecktes Seil (Länge l, Masse m) von dem man annehmen kann, daß die Masse des Seils homogen über die gesamte Seillänge verteilt ist und das gegen Biegungen keinen Widerstand aufweist, gleitet von einer Tischkante herab. Zum Zeitpunkt $t=0$ hängt ein Seilstück der Länge x_0 bewegungslos über die Kante senkrecht nach unten.

a) Wie groß muss x_0 sein, damit sich das Seil in Bewegung setzt (Haftreibungskoeffizient μ_H)? Die Haftreibung muß betragsmäßig kleiner als die Gewichtskraft sein. Die Bewegung beginnt, wenn beide gleich sind. Es handelt sich um eine eindimensionale Bewegung. Betrachtet wird der Punkt $x(t)$.

$$0 \;=\; F_G + F_{HR} = m_{x_0}g - \mu_H m_{l-x_0}g$$

Damit wird mit der Liniendichte ρ

$$\begin{aligned} 0 &= \rho x_0 - \mu_H\rho(l-x_0) \\ x_0 &= \frac{\mu_H}{1+\mu_H}l \end{aligned}$$

b) Formulieren Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung und berechnen Sie die zum Zeitpunkt t über die Kante herabhängende Seillänge $x(t)$ unter Berücksichtigung der Gleitreibung (Gleitreibungskoeffizient μ_G)!

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_G + F_{GR} \\ m\ddot{x} &= m_x\,g - \mu_G\,m_{l-x}\,g \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = \frac{m_x}{m}\,g - \mu_G\frac{m_{l-x}}{m}g \;=\; \frac{x}{l}\,g - \mu_G\frac{l-x}{l}g$$

Diese DGL wird auf Normalform gebracht

$$\ddot{x} - (1+\mu_G)\frac{g}{l}\,x \;=\; -\mu_G g$$

und mittels Exponentialansatz gelöst. Die homogene Lösung ist

$$x_h(t) = A\mathrm{e}^{\gamma t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t} \text{ mit } \gamma = \sqrt{(1+\mu_G)\frac{g}{l}}\,.$$

Die spezielle Lösung gewinnt man durch scharf hingucken oder systematisch (aber hier umständlich!) durch Variation der Konstanten zu

$$x_s = \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\,.$$

Für die allgemeine Lösung ergibt sich damit zunächst

$$x(t) \;=\; x_h(t) + x_s(t) = A\mathrm{e}^{\gamma t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\,.$$

Die Integrationskonstanten bestimmt man aus den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $v(t=0) = 0$ zu

$$A = B \;=\; \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\right)\,.$$

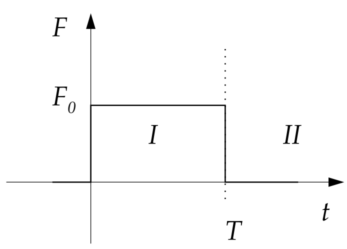
Damit lautet also die Lösung des Problems

$$x(t) \;=\; \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\right)\left(\mathrm{e}^{\gamma t} + \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) + \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\,.$$

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt T, ab welchem das Seil frei fällt.

$$\begin{aligned}
x(T) &= l = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l\right)\left(\mathrm{e}^{\gamma T} + \mathrm{e}^{-\gamma T}\right) + \frac{\mu_G}{(1+\mu_G)} l \\
\cosh \gamma T &= \frac{l}{(1+\mu_G)\, x_0 - \mu_G\, l} \\
T &= \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{Arcosh}\left(\frac{l}{(1+\mu_G)\, x_0 - \mu_G\, l}\right)
\end{aligned}$$

3.3 Erzwungene Schwingung



Da die Kraft Unstetigkeiten aufweist, muß die DGL für jedes Stetigkeitsintervall getrennt gelöst werden.

Im Bereich I führt die NEWTONsche Bewegungsgleichung auf die folgende inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x \;=\; \frac{F_0}{m}$$

Die Lösung ergibt sich durch Superposition der homogenen

$$x_h \;=\; A_I \mathrm{e}^{i\omega_0 t} + B_I \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$$

und der speziellen

$$x_s = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

Lösung zu

$$x_I = A_I \mathrm{e}^{i\omega_0 t} + B_I \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,.$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$A_I = B_I = -\frac{F_0}{2m\omega_0^2}\,.$$

Damit ist die vollständige Lösung im Bereich I

$$x_I = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,(1-\cos\omega_0 t)$$

und für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\dot{x}_I = \frac{F_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Im Bereich II finden wir dieselbe DGL wie oben nur ohne Inhomogenität. Die Lösung ist damit

$$x_{II} = A_{II}\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + B_{II}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\,.$$

Die Integrationskonstanten werden aus der Bedingung, daß sowohl der Ort als auch die Geschwindigkeit stetige Funktionen sein müssen, bestimmt. Das führt auf

$$\begin{aligned}
x_{II}(T) &= x_I(T) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,(1-\cos\omega_0 T) =: C \\
\dot{x}_{II}(T) &= \dot{x}_I(T)\frac{F_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 T =: i\omega_0 D\,,
\end{aligned}$$

wobei mit C und D geeignete Abkürzungen eingeführt wurden. Man findet für die Integrationskonstanten schließlich

$$\begin{aligned}
A_{II} &= \frac{\mathrm{e}^{-i\omega_0 T}}{2}(C+D) \\
B_{II} &= \frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 T}}{2}(C-D)\,.
\end{aligned}$$

Die Lösung im Bereich II wird damit

$$x_{II}(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}(\,(1-\cos\omega_0 T)\cos\omega_0(t-T) + \sin\omega_0 T\,\sin\omega_0(t-T))$$

was unter Beachtung der Additionstheoreme für Winkefunktionen zu

$$\begin{aligned}
x_{II}(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,(\cos\omega_0(t-T) - \cos\omega_0 T\cos\omega_0(t-T) + \sin\omega_0 T\,\sin\omega_0(t-T)) \\
&= \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,(\cos\omega_0(t-T) - \cos\omega_0 t) \\
&= \frac{F_0}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 T\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,(\cos\omega_0 T - 1)\cos\omega_0 t \\
&=: U\sin\omega_0 t + V\cos\omega_0 t
\end{aligned}$$

zusammenfällt. Die Amplitude, d.h. den Maximalausschlag der Schwingung, nach Abschalten der Kraft findet man aus den Nullstellen der Geschwindigkeit.

$$\dot{x}_{II}(t_e) \quad = \quad 0 \quad \Longrightarrow \quad V \sin \omega_0 t_e = U \cos \omega_0 t_e$$

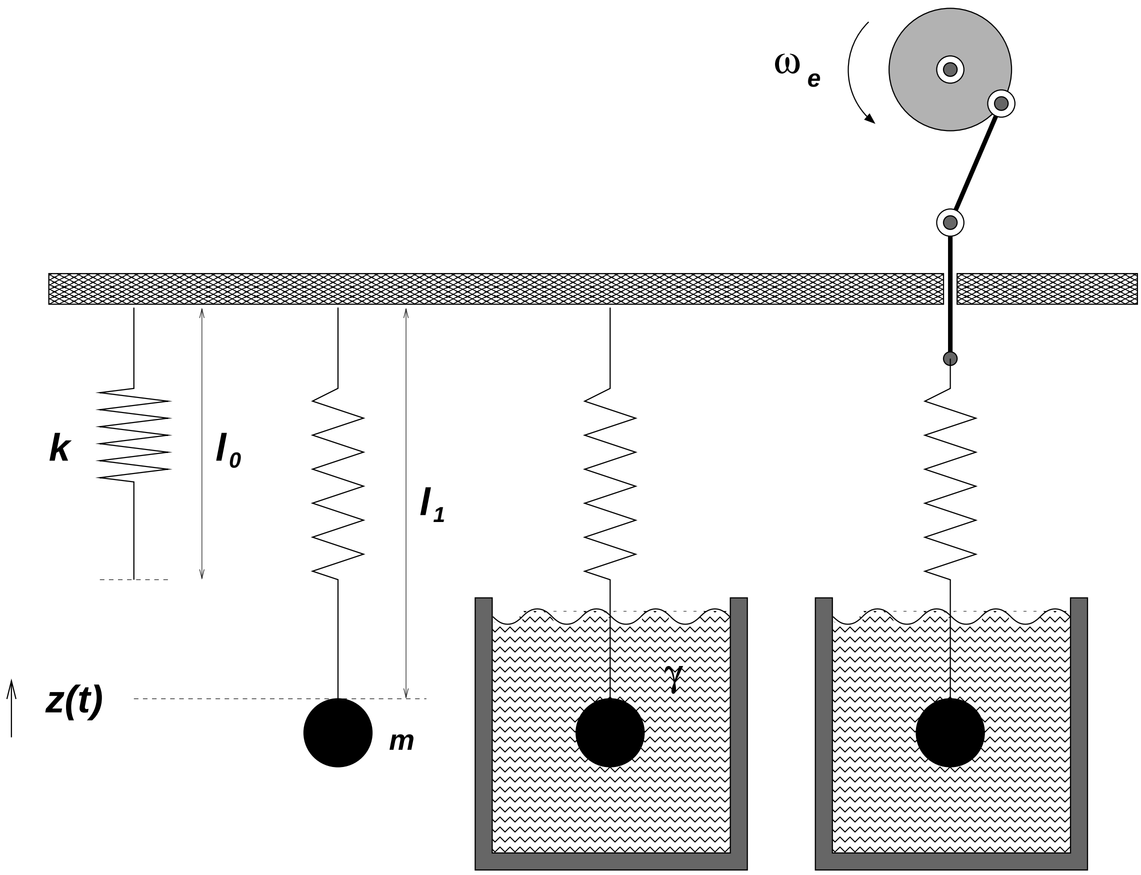
Für den Extremwert findet man

$$x_{II}(t_e) \quad = \quad \left(\frac{U^2}{V} + V \right) \cos \omega_0 t_e = \left(\frac{V^2}{U} + U \right) \sin \omega_0 t_e$$

Indem man diese beiden Gleichungen quadriert und addiert, ergibt sich nach Einsetzen von U und V

$$x_{II}(t_e) \quad = \quad \sqrt{U^2 + V^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sqrt{2 - 2\cos \omega_0 T} = \frac{2F_0}{m\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 T}{2} \, .$$

3.4 Periodische Erregung



An eine vertikal hängende Feder der Länge l_0 wird eine Masse m angehängt, wodurch sich die Feder auf die Länge l_1 dehnt.

a) Bestimmen Sie die Federkonstante der Feder, die Eigenfrequenz f_0 bzw. die Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften Problems.

   Da sich die angehängte Masse in Ruhe befindet ist die Summe der einwirkenden Kräfte 0.

$$0 \quad = \quad F_G + F_F = -mg + k(l_1 - l_0) \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{mg}{l_1 - l_0}$$

Stößt man die Masse an oder lenkt sie vertikal aus, führt sie zunächst ungedämpfte Schwingungen um die neue Ruhelage $z = 0$ aus. Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu

$$m\ddot{z} = F_F = -kz$$

was auf die DGL für harmonische Schwingungen

$$\ddot{z} + \omega_0^2 \, z = 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l_1 - l_0}$$

führt. Damit ist

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1 - l_0}} \qquad \text{bzw.} \qquad T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 - l_0}{g}}$$

Anschließend wird die Masse ein kleines Stück weiter, bis l_2, nach unten gezogen und zum Zeitpunkt t_0 losgelassen, worauf die Masse vertikale Schwingungen ausführt. Nach etlichen Schwingungen ist zum Zeitpunkt t_1 die Amplitude dieser Schwingungen nur noch halb so groß wie am Anfang.

b) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und die Kreisfrequenz des gedämpften Oszillators!

Am langsamen Abklingen der Schwingungen erkennt man, daß es sich um einen gedämpften Oszillator im Schwingfall handelt. Die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = F_F + F_S = -kz - \gamma\,\dot{z}\,,$$

bei der eine STOKES'sche Reibung angenommen wurde, führt auf die DGL

$$\ddot{z} + 2r\dot{z} + \omega_0^2 \, z = 0 \qquad \text{mit } \omega_0 \text{ wie oben und} \qquad r = \frac{\gamma}{2m}\,.$$

Diese lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten wird mit Exponentialansatz gelöst, was mit den AB $z(0) = l_1 - l_2$ und $\dot{z} = 0$ auf

$$z(t) = A\mathrm{e}^{-r\,t}\cos\left(\omega\,t - \eta\right)$$

mit

$$\omega^2 = \omega_0^2 - r^2 \quad , \quad A = \frac{(l_1 - l_2)\omega_0}{\omega} \qquad \text{und} \qquad \eta = \arctan\frac{r}{\omega}\,,$$

führt. Zum Zeitpunkt t_1 findet man also für die Amplitude

$$A\,\mathrm{e}^{-r\,t_1} = \frac{A}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{\ln 2}{t_1} \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma = \frac{2\,m\ln 2}{t_1}$$

Nachdem die Masse zum Stillstand gekommen ist, wird der Aufhängepunkt periodisch gemäß $z_A(t) = A_0 \sin\omega_E t$ bewegt.

c) Bestimmen Sie die Amplitude A und die Phasenverschiebung η der erzwungenen Schwingung für Zeiten $t \gg (t_1 - t_0)$ in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz ω_E!

Die NEWTON'sche Bewegungsgleichung führt jetzt auf eine lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten.

$$\ddot{z} + 2r\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 A_0 \sin \omega_E t \qquad \text{mit } \omega_0 \text{ und } r \text{ wie unter b)}.$$

Die Lösung ergibt sich durch Superposition der Lösung der homogenen DGL, die unter b) gelöst wurde, und irgend einer speziellen Lösung.

Da nur Zeiten, die groß gegen die Abklingzeit der Lösung der homogenen DGL sind, interessieren, überlebt nur die spezielle Lösung. Diese gewinnt man, indem man eine periodische Bewegung mit der Erregerfrequenz ansetzt.

$$z_s(t) = A \sin(\omega_E t - \eta)$$

Indem man den $\sin(\omega_E t - \eta)$ zerlegt

$$z_s(t) = A \cos\eta \, \sin\omega_E t - A \sin\eta \, \cos\omega_E t \,,$$

und der Kürze halber

$$B := -A \sin\eta \qquad \text{und} \qquad C := A\cos\eta$$

einführt, erhält man

$$A^2 = B^2 + C^2 \qquad \text{und} \qquad \tan\eta = -\frac{B}{C}\,.$$

Die Konstanten B und C werden bestimmt, indem der Ansatz in die DGL eingesetzt und ein Koeffizientenvergleich bezüglich $\cos\omega_E t$ bzw. $\sin\omega_E t$ durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} B &= \frac{-2\,r\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4r^2\omega_E^2}\omega_0^2\,A_0 \\ C &= \frac{(\omega_0^2 - \omega_E^2)}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4r^2\omega_E^2}\omega_0^2\,A_0\,, \end{aligned}$$

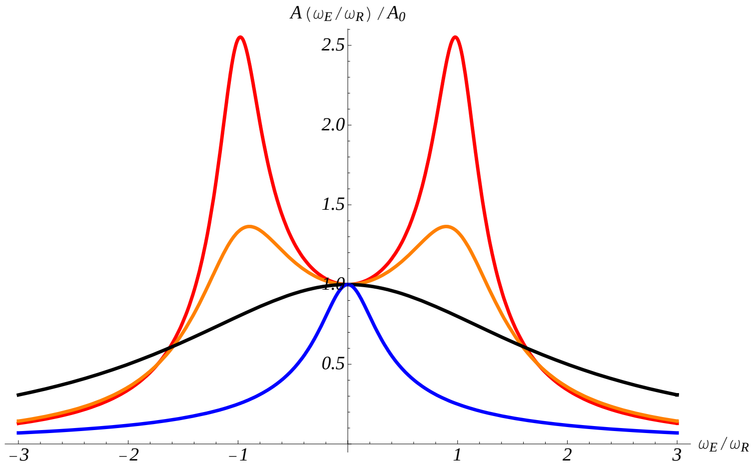
und damit

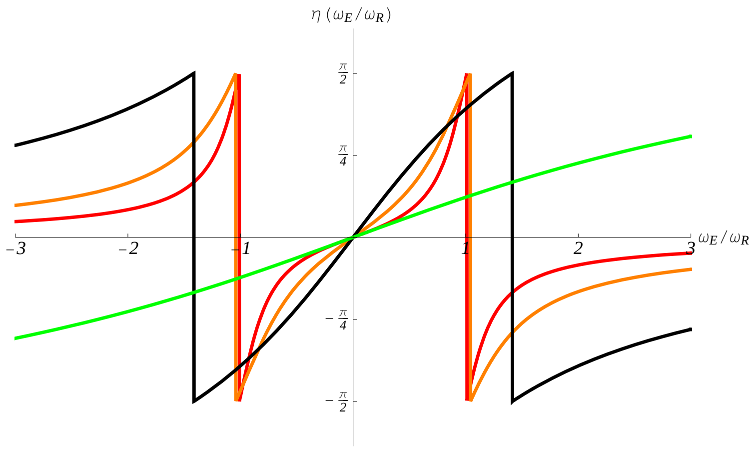
$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4r^2\omega_E^2}}A_0 \\ \eta &= \arctan\frac{2r\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\,. \end{aligned}$$

Bei welcher Frequenz ω_R wird die Amplitude maximal?

$$\frac{dA}{d\omega_E} = \frac{-2\,\omega_E(\omega_E^2 - \omega_0^2 + 2r^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4r^2\omega_E^2}^{\,3}}\omega_0^2\,A_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2r^2}$$

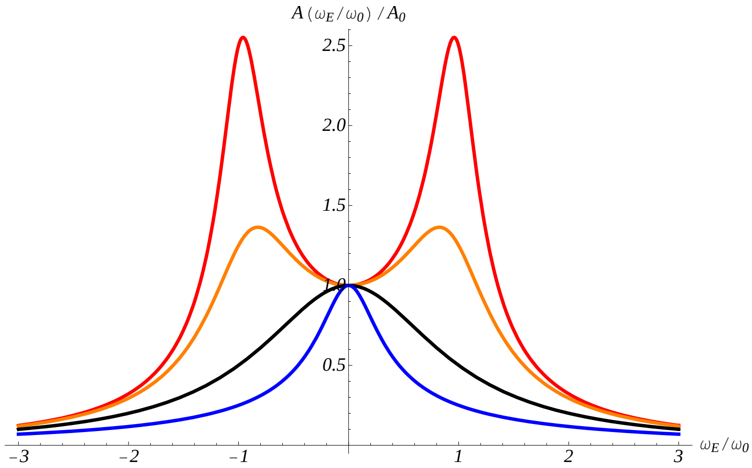
d) Stellen Sie $A(\omega_E)/A_0$ bzw. $\eta(\omega_E)$ als Funktionen von ω_E/ω_R grafisch dar.

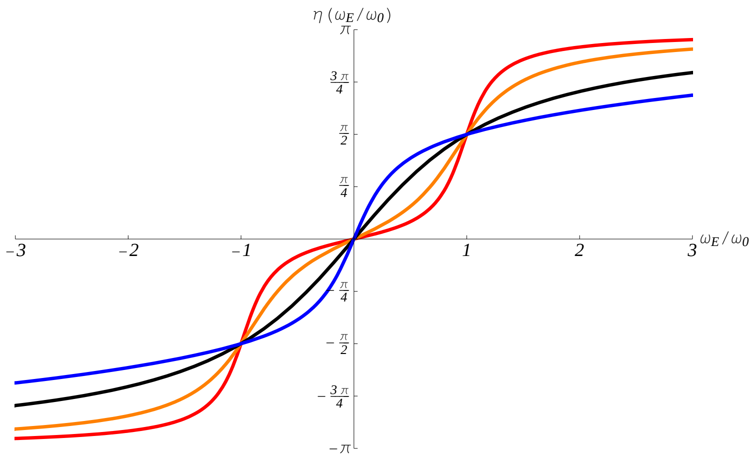




Amplitudenverhältnis A/A_0 und Phasenverschiebung η in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz. Bedeutung der Farben: Rot: r/ω_0=0.2, Orange: r/ω_0=0.4, Schwarz: r/ω_0=1.0, Grün: r/ω_0=1.4 Blau: r/ω_0=2.0

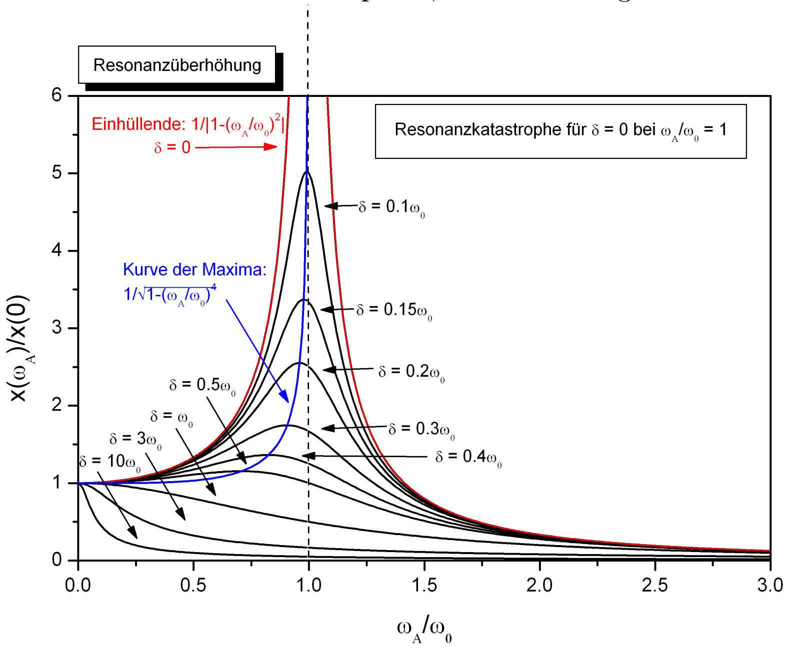
Besser: Die Darstellung über ω_E/ω_R verschleiert leider etwas die Physik, namentlich daß eine Erhöhung der Dämpfung die Resonanzfrequenz zu niedrigeren Frequenzen verschiebt, während der Phasensprung immer bei ω_0 stattfindet. Es erscheint deshalb besser, Amplitude $A(\omega_E)/A_0$ und Phasenverschiebung $\eta(\omega_E)$ über ω_E/ω_0 darzustellen.





Amplitudenverhältnis A/A_0 und Phasenverschiebung η in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz. Bedeutung der Farben: Rot: r/ω_0=0.2, Orange: r/ω_0=0.4, Schwarz: r/ω_0=1.0, Blau: r/ω_0=2.0.

Und hier noch ein Bild aus Wikipedia, bei Benutzung bitte die Bezeichnungen anpassen:



Eine schöne Spielerei befindet sich unter **http://www.walter-fendt.de/ph14d/resonanz.htm**