

Theoretische Mechanik

6. Übung Lösungen

6.1 Der besoffene Astronom :-)

Ein Astronom, der etwas über den Durst getrunken hat, behauptet am Biertisch, einen Himmelskörper beobachtet zu haben, der auf einer logarithmischen Spirale, deren Parameterdarstellung in ebenen Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi) = \rho_0 e^{-k\varphi}$$

lautet, ins Zentralgestirn stürzte. Desweiteren habe er ermittelt, daß der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

Wie müßte die Kraft aussehen, die das Zentralgestirn auf den Körper ausübt, wenn der Astronom recht hätte?

Die NEWTONSche Gleichung in Polarkoordinaten (bzw. in Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \pi/2$ siehe Aufgabe 2.1 bzw. 2.2) ist

$$\frac{\vec{F}}{m} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

Damit liest man die radiale und azimutale Komponente der Kraft ab:

$$F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \quad \text{bzw.} \quad F_\varphi = m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$$

Die Zeitableitung des Winkels gewinnt man aus der Konstanz des Drehimpulses, da es sich nämlich um eine ebene Bewegung handelt, muß die Richtung des Drehimpulses konstant bleiben und der Flächensatz sagt uns, daß auch dessen Betrag konstant bleibt. Man erhält damit

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2} \tag{1}$$

Die Zeitableitung der Bahnkurve gewinnt man über die Kettenregel:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = -k\rho\dot{\varphi} = -k\frac{L}{m\rho}.$$

Für die zweiten Zeitableitungen findet man damit und unter Verwendung von Gl. 1:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -2\frac{L}{m\rho^3}\dot{\rho} = -2\frac{\dot{\varphi}}{\rho}\dot{\rho}, \\ \ddot{\rho} &= k\frac{L}{m\rho^2}\dot{\rho} = -k^2\frac{L^2}{m^2\rho^3} = -k^2\rho\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die radiale Komponente der Kraft zu

$$\begin{aligned}\frac{F_\rho}{m} &= -k^2\rho\frac{L^2}{m^2\rho^4} - \rho\frac{L^2}{m^2\rho^4} \\ &= -(1+k^2)\frac{L^2}{m^2\rho^3},\end{aligned}$$

während die azimutale Komponente

$$\frac{F_\varphi}{m} = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\left(-2\frac{\dot{\varphi}}{\rho}\dot{\rho}\right) = 0$$

verschwindet. Damit haben wir es also mit einer anziehenden Radialkraft (zumindest in der Bahnebene!) zu tun.

b) Hätte diese Kraft ein Potential, wenn ja welches?

Unter der Annahme, daß es sich um eine Radialkraft handelt, findet man

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \left(- \underbrace{(1+k^2)\frac{L^2}{m}}_{=: C} \frac{\vec{r}}{r^4} \right) \\ &= -C \frac{1}{r^4} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{r}}_{=0} - C \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^4} \right) \times \vec{r} = -C \left(\frac{-4}{r^5} \vec{e}_r \right) \times \vec{r} = \frac{4C}{r^6} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Es gibt also ein Potential. Dieses ergibt sich wegen

$$\vec{F} = -\frac{C}{r^3} \vec{e}_r = \frac{d}{dr} \left(\frac{C}{2} r^{-2} \right) \vec{e}_r = \vec{\nabla} \left(\frac{C}{2} r^{-2} \right) \stackrel{!}{=} -\vec{\nabla} U(\vec{r}),$$

zu

$$U(\vec{r}) = -\frac{C}{2} \frac{1}{r^2} = -(1+k^2) \frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2}$$

6.2 Kegelschnitte

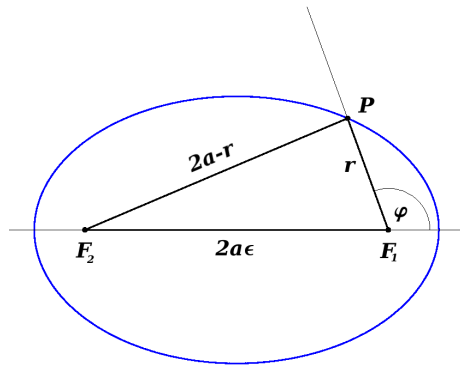
Bestimmen Sie die Abhängigkeit des Radius' vom Winkel $r(\varphi)$ in ebenen Polarkoordinaten für eine Ellipse und eine Hyperbel, indem Sie die folgenden Eigenschaften benutzen:

- Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten) konstant ($=2a$) ist.
- Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten), konstant ($=2a$) ist.

- Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zu einem festen Punkt (dem Brennpunkt F) und einer Geraden (der Leitgeraden) gleich ist.

Der Abstand der Brennpunkte sei für Ellipse und Hyperbel $2a\epsilon$, wobei ϵ die numerische Exzentrizität bezeichnet, während bei der Parabel der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt a sei.

Ellipse



Mit Hilfe des Cosinussatzes findet man

$$(2a - r)^2 = (2a\epsilon)^2 + r^2 - 4\epsilon ar \cos(\pi - \varphi),$$

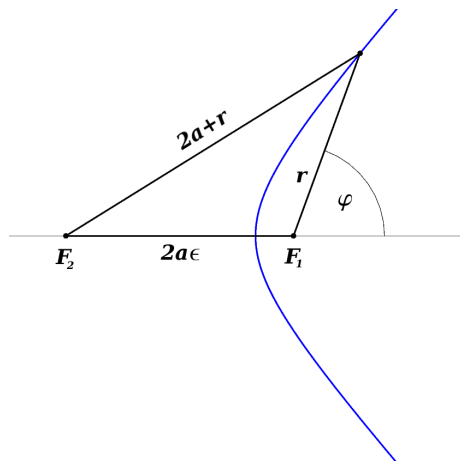
was nach Ausmultiplizieren auf

$$4a^2(1 - \epsilon^2) = 4ar(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

führt. Auflösen nach r liefert

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \varphi} =: \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi} \implies r(\varphi = 0) = r_{\min}$$

Hyperbel



Mit Hilfe des Cosinussatzes findet man

$$(2a + r)^2 = (2a\epsilon)^2 + r^2 - 4\epsilon ar \cos(\pi - \varphi),$$

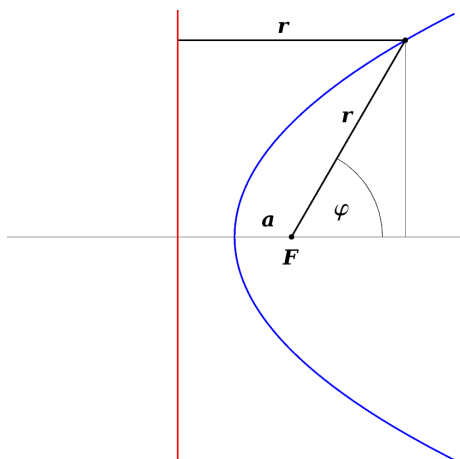
was nach Ausmultiplizieren auf

$$4a^2(1 - \epsilon^2) = -4ar(1 - \epsilon \cos \varphi)$$

führt. Auflösen nach r liefert

$$r(\varphi) = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \varphi} =: \frac{k}{1 - \epsilon \cos \varphi} \implies r(\varphi = \pi) = r_{\min}$$

Parabel



Hier gilt nun

$$\cos \varphi = \frac{r - 2a}{r},$$

was nach Auflösen zu

$$r(\varphi) = \frac{2a}{1 - \cos \varphi} =: \frac{k}{1 - \epsilon \cos \varphi}$$

$$\implies r(\varphi = 0) = r_{max} = \infty$$

Drücken Sie ϵ mit Hilfe des Drehimpulses und der Energie aus (folgen Sie dabei der Vorlesung) für den Fall, daß oben genannte Kurven die Bahn eines Massepunktes im Gravitationsfeld einer sehr großen Punktmasse beschreiben. Was folgt aus den Eigenschaften der numerischen Exzentrizität für die Energie von Körpern auf elliptischen bzw. hyperbolischen Bahnen?

Zunächst kann man für ein beliebiges radialsymmetrische Potential $U(r)$ mit Hilfe der Energie- und den Drehimpulserhaltung eine implizite nichtlineare DGL 1. Ordnung für die Bahnkurve herleiten (Siehe Aufgabe 6.4). Dabei kann man zu Polarkoordinaten oder zu Kugelkoordinaten mit $\theta = \pi/2$ übergehen. Hier wählen wir die letztere Möglichkeit. Nach Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{eff}(r))} \quad \text{mit} \quad U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Das führt direkt zur Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\int d\varphi = \int dr \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E + \alpha/r) - L^2/r^2}}.$$

Die Substitution

$$\xi = -\frac{L}{r}, \quad d\xi = \frac{L}{r^2} dr = \frac{\xi^2}{L} dr \quad \implies \quad dr = \frac{L}{\xi^2} d\xi$$

drängt sich förmlich auf. Wir erhalten damit

$$\int d\varphi = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2mE - 2\beta\xi - \xi^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = m\alpha/L$$

$$= \int \frac{d\xi}{\sqrt{\gamma^2 - (\beta + \xi)^2}} \quad \text{mit} \quad \gamma = \beta \sqrt{1 + \frac{2mE}{\beta^2}}.$$

Indem man eine weitere Substitution $\eta = \xi + \beta$ vornimmt, ergibt sich

$$\int d\varphi = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}},$$

was man unschwer integrieren kann

$$\varphi + C = \arcsin \frac{\eta}{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \eta = \gamma \sin(\varphi + C).$$

Indem man $C = \pi/2$ wählt und alle Substitutionen rückwärts einsetzt, ergibt sich

$$\eta = \xi + \beta = -\frac{L}{r} + \frac{m\alpha}{L} = \gamma \cos \varphi = \frac{m\alpha}{L} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \varphi,$$

was man schließlich nach r auflösen kann:

$$r = \frac{L^2}{\alpha m} \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \varphi}.$$

Der Vorzeichenunterschied zur oben abgeleiteten Ellipsengleichung kann einfach dadurch beseitigt werden, daß in diesem Fall die Integrationskonstante als $-\pi/2$ gewählt wird.

Ellipsenbahnen haben $0 < \epsilon < 1$, daraus folgt, daß dann $E < 0$ gelten muß. Für Hyperbeln gilt entsprechend $\epsilon > 1$, woraus $E > 0$ folgt.

Kreisbahnen im Zentralpotential

- a) Für welche a und n sind in dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a \frac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ **stabile** Kreisbahnen möglich?

Die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = a \frac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ ist eine konservative Zentralkraft; Drehimpuls und Energie sind also Erhaltungsgrößen. Das Potential für $n \neq 1$ ist:

$$U(r) = - \int F(r) dr = \frac{a}{n-1} r^{-n+1}$$

und für $n = 1$ erhält man

$$U(r) = -a \ln \frac{r}{r_0},$$

wobei die willkürliche Integrationskonstante als $a \ln r_0$ gewählt wurde. Der Energiesatz liefert unter Verwendung des Drehimpulserhaltung ($L = mr^2\dot{\varphi}$)

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{n-1} r^{-n+1} \equiv \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

Stabile Kreisbahnen (d.h. $r(t) = R, \forall t$) sind immer dann möglich, wenn das Effektivpotential $U_{\text{eff}}(r)$ bei $r = R$ ein **Minimum** besitzt (und die Energie E gleich dem Wert des Effektivpotentials im Minimum ist); also muß gelten:

$$U'_{\text{eff}}(R) = -\frac{L^2}{mr^3} - ar^{-n} \Big|_{r=R} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{ma} = R^{3-n}$$

Eine Lösung für $R > 0$ kann nur existieren, falls $\boxed{a < 0}$; dann wird

$$R = \left(\frac{L^2}{m|a|} \right)^{\frac{1}{3-n}}.$$

Damit es sich um ein Minimum handelt, muß die zweite Ableitung von $U_{\text{eff}}(r)$ bei R größer als Null sein:

$$U''_{\text{eff}}(R) = \frac{3L^2}{mr^4} - n|a|r^{-n-1} \Big|_{r=R} = \frac{|a|}{R^{n+1}} \left(\frac{3L^2 R^{n-3}}{m|a|} - n \right) = \frac{|a|}{R^{n+1}} (3-n) > 0$$

(Hier haben wir das oben erhaltene R eingesetzt.)

Stabile Kreisbahnen sind also nur für $n < 3$ möglich.

$n = 2$ liefert die Gravitationskraft und $n = -1$ den dreidimensionalen harmonischen Oszillator.

Man überzeugt sich leicht, daß alle Überlegungen auch für den Fall $n = 1$ gelten.

- b*) Bestimmen Sie das Frequenzverhältnis ω_s/ω_0 **kleiner** radialer Schwingungen um eine stabile Kreisbahn, wobei ω_0 die Umlauffrequenz auf der stabilen Kreisbahn bezeichnet. Was bedeutet das speziell für die Fälle $n = 2$ und $n = -1$?

Kleine radiale Schwingungen werden sich ergeben, wenn die Energie E etwas größer als $U_{\text{eff}}(R)$ ist. Wir führen eine TAYLOREntwicklung des Effektivpotentials um $r = R$ bis zur zweiten Ordnung aus:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &\approx U(R) + \frac{1}{2}(r-R)^2 U''_{\text{eff}}(R) = U(R) + \frac{1}{2}(r-R)^2 \frac{|a|}{R^{n+1}} (3-n) \\ \Rightarrow \omega_s^2 &= \frac{1}{m} U''_{\text{eff}}(R) = (3-n) \frac{|a|}{mR^{n+1}} = (3-n) \frac{|a|}{m} \left(\frac{L^2}{m|a|} \right)^{-\frac{1+n}{3-n}}. \end{aligned}$$

Für das Gravitationsfeld, $n = 2$, wird:

$$m\omega_s^2 = \frac{|a|}{R^3}, \quad m\omega_o^2 R = \frac{|a|}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_s}{\omega_o} = 1$$

Die Bahn ist also geschlossen (rationales Frequenzverhältnis) - wie wir aus den Keplerschen Gesetzen wissen - handelt es sich um eine **Ellipse** mit dem **Kraftzentrum im Brennpunkt**. Bei einem Umlauf durchläuft r gerade **eine** radiale Schwingung.

Für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator, $n = -1$, wird:

$$m\omega_s^2 = 4|a|, \quad \omega_o^2 = \frac{|a|}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_s}{\omega_o} = 2$$

Die Bahn ist wieder geschlossen, es handelt sich um eine **Ellipse** mit dem **Kraftzentrum im Mittelpunkt**. Bei einem Umlauf durchläuft r gerade **zwei** radiale Schwingungen.

Nur in den Kraftfeldern mit $n = 2$ und $n = -1$ sind **alle gebundenen** Bahnen auch **geschlossen** (Beweis siehe: ARNOL'D, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Abschn. 2.5.4.). Für $n = 1$ erhalten wir z.B.:

$$m\omega_s^2 = 2 \frac{|a|}{R^2}, \quad m\omega_o^2 R = \frac{|a|}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_s}{\omega_o} = \sqrt{2}$$

Die Bahn ist **nicht** geschlossen (irrationales Frequenzverhältnis).

6.4 Apsidendrehung im Zentralpotential (1)

- a) Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz für die gebundene Bewegung eines Massenpunktes (Masse m) in einem kugelsymmetrischen Potential $U(r)$!

Es gelten die Erhaltungssätze für die Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$$

und den Drehimpuls

$$\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow \begin{cases} \text{Richtung konstant} & \Rightarrow \text{ebene Bewegung} \\ \text{Betrag konstant} & \Rightarrow \text{Flächensatz} \end{cases}$$

Indem man zu Kugelkoordinaten übergeht und $\theta = \pi/2$ wählt und anschließend den winkelabhängigen Teil der kinetischen Energie mit Hilfe des Drehimpulses ausdrückt, wird aus dem Energieerhaltungssatz die folgende implizite nichtlineare DGL 1. Ordnung

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \text{const.}$$

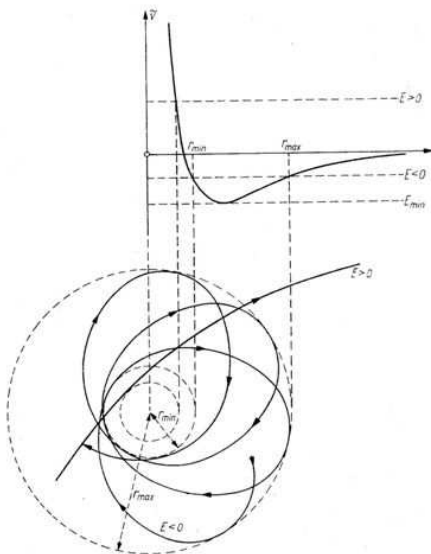
- b) Gewinnen Sie daraus die Bahnkurve in der Form $\varphi(r)$

Die vorstehende Gleichung kann nach \dot{r} aufgelöst werden. Anschließend Variablentrennung liefert

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} = dt = \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{mr^2}{L} d\varphi.$$

Das führt direkt zur Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\int d\varphi = \varphi + \text{konst.} = \int dr \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - L^2/r^2}}.$$



Eine gebundene Bewegung des Teilchens liegt für $E < 0$ vor. Sie erfolgt zwischen einem minimalen (r_-) und einem maximalen (r_+) Abstand vom Kraftzentrum, überlagert von einer Rotation um das Zentrum. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Bahn geschlossen ist. Im allgemeinen Falle ergibt sich eine Rosettenbahn, die in hinreichend langem Zeitraum das gesamte zwischen den Grenzabständen liegende Gebiet überstreicht.

- c*) Zeigen Sie, dass sich der Radiusvektor zwischen zwei zeitlich aufeinander folgenden Zeitpunkten, zu denen der Körper seinen maximalen (oder minimalen) Abstand vom Zentrum erreicht, um einen Winkel $\Delta\varphi$ dreht, der durch

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - L^2/r^2}}$$

gegeben ist.

Während sich der Abstand r vom Zentrum von r_+ bis r_- und wieder bis r_+ ändert, dreht sich der Ortsvektor um den Winkel φ , für den sich aus der letzten Gleichung

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{L}{r \cdot \sqrt{2mr^2(E - U(r)) - L^2}}$$

ergibt. Die Bahn ist nur dann geschlossen, wenn $\Delta\varphi$ ein rationaler Teil von 2π ist, also

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{m}{n} \quad m, n \text{ ganz}$$

gilt. Dann hat der Ortsvektor nach n -maliger Wiederholung der zugehörigen Zeitperiode m ganze Umläufe ausgeführt und fällt wieder mit seinem Anfangswert zusammen, d.h. die Bahn ist geschlossen.

- d*) Bei der Auswertung des Integrals für das Gravitationspotential $U(r) = -\alpha/r$ sind die auftretenden Integrale durch mehrfache Substitution zu lösen.

Zunächst ergibt sich, nachdem Energie und Drehimpuls mit den in der Vorlesung abgeleiteten Beziehungen

$$L = m\alpha k \quad \text{und} \quad E = \frac{m\alpha^2(1 - \epsilon^2)}{2L^2}$$

durch die numerische Exzentrizität ϵ und den Halbparameter k ausgedrückt wurden, das Integral

$$\Delta\varphi = 2 \frac{k}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r \sqrt{-r^2 + \frac{2kr}{1 - \epsilon^2} - \frac{k^2}{1 - \epsilon^2}}}.$$

Der Radikand wird in der Form

$$-r^2 + \frac{2kr}{1 - \epsilon^2} - \frac{k^2}{1 - \epsilon^2} = - \left[r - \frac{k}{1 - \epsilon^2} \right]^2 + \left(\frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2$$

geschrieben; anschließend wird substituiert:

$$r - \frac{k}{1 - \epsilon^2} \equiv \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2} \cdot \cos \xi.$$

Damit ergibt sich das Integral

$$\Delta\varphi = -2 \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2} \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{1 + \epsilon \cos \xi}.$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei durch $\cos \xi_{\pm} = \pm 1$ gegeben.

Integrale, deren Integrand eine rationale Funktion von $\sin \xi$ und/oder $\cos \xi$ ist, können mit der Standardsubstitution

$$t \equiv \tan \frac{\xi}{2} \quad \cos \xi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad d\xi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

berechnet werden. In diesem Falle ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 4 \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{1-\epsilon} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \\ &= 4\sqrt{1-\epsilon^2} \frac{1}{1-\epsilon} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}} \Bigg|_0^{\infty} \stackrel{!}{=} 2\pi \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$