Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

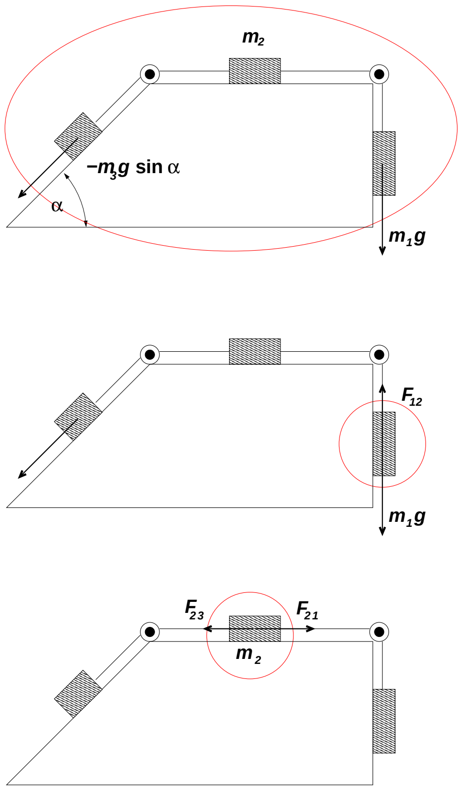
Theoretische Mechanik

8. Übung Lösungen

8.1 Innere und äußere Kräfte

Die Körper der Massen m_1, m_2 und m_3 können sich reibungsfrei bewegen. Die Rollen- und Seilmassen können vernachlässigt werden.

1. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Massen?



Um die Beschleunigung zu berechnen, werden alle 3 Massen als ein System betrachtet. Die Seilkräfte sind in diesem System innere Kräfte und heben sich gegenseitig auf. Man muß also nur den Einfluß der Schwerkraft und der Führungskräfte betrachten. Die Führungskräfte stehen aber senkrecht auf der Bahn und tragen deshalb nicht zur Beschleunigung des Systems bei. Zur Beschleunigung des Systems tragen nur die Kraftkomponenten in Bewegungsrichtung des Systems bei. Die Newtonsche Bewegungsgleichungen lautet für dieses System

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2 + m_3)a &= (m_1 - m_3 \sin\alpha)\, g \\
\Longrightarrow \qquad a &= \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3}\, g\,.
\end{aligned}
$$

2. Wie groß sind die Seilkräfte F_{12} und F_{23} während der Bewegung?
   Zur Berechnung der Seilkräfte ist es zweckmäßig, ein System zu betrachten, welches nur die Masse m_1 enthält. In diesem System ist die Seilkraft F_{12} äußere Kraft und tritt also in der NEWTONschen Bewegungsgleichung auf:

$$
m_1 a = m_1 g + F_{12} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{12} = m_1(a - g)
$$

Setzt man a ein, ergibt sich

$$F_{12} = -m_1 \left(1 - \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3}\right) g$$

Analog für F_{23}. Die NEWTONsche Bewegungsgleichung für die Masse m_2 lautet.

$$\begin{aligned}
m_2\, a &= F_{21} + F_{23} \\
F_{23} &= m_2 a - F_{21} \overset{actio\,=\,reactio}{=} m_2 a + F_{12} \\
&= m_2 \left(\frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3}\right) g - m_1 \left(1 - \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3}\right) g \\
&= \left((m_1 + m_2)\frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} - m_1\right) g
\end{aligned}$$

8.2 Stoß zweier Teilchen

Eine Kugel (Masse m_1) stößt mit dem Impuls $\vec{p}_1$ auf eine zweite zunächst ruhende Kugel (Masse m_2). Die Kugeln sollen dabei als Massepunkte betrachtet werden.

a) Formulieren Sie unter der Annahme eines elastischen Stoßes die Impuls- und Energiebilanz im Laborsystem Σ_L und im Schwerpunktsystem Σ_S, in dem der gemeinsame Schwerpunkt beider Körper ruht. Welche Schlußfolgerungen über die Bewegung der Kugeln nach dem Stoß lassen sich daraus herleiten?

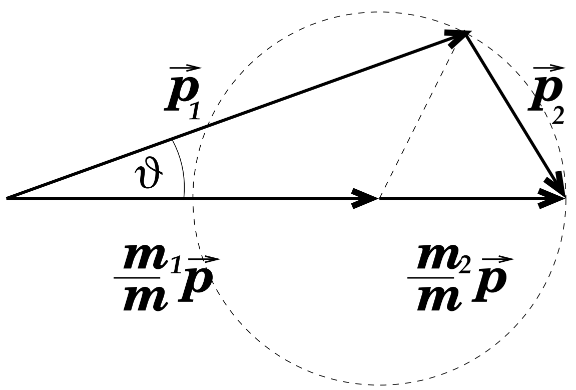
Formulierung von Impulserhaltungssatz und Energieerhaltungssatz im **Laborsystem**:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad\qquad \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_1} = \frac{\vec{p}_1^{\;2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\;2}}{2m_1}\,.$$

Dabei sind $\vec{p}, \vec{p}_1$ der Impuls des ersten Teilchens vor und nach dem Stoß und $\vec{p}_2$ der Impuls des zweiten Teilchens nach dem Stoß.
Eliminiert man den Impuls $\vec{p}_2$ aus diesen beiden Gleichungen, erhält man eine Beziehung zwischen den Impulsen des ersten Teilchens in der Form

$$(\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{p})^2 = (\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{p})^2\,.$$

Bei gegebenem Anfangsimpuls ist dies die Gleichung einer Kugel, auf der die Endpunkte des Vektors $\vec{p}_1$ liegen (siehe Abbildung für den Fall $m_1 > m_2$). Der Kugelmittelpunkt liegt bei $\frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \vec{p}$; der Kugelradius ist durch $R = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot |\vec{p}|$ gegeben. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die Richtung des Anfangsimpulses.



Damit sind die Aussagen erschöpft, die Impuls- und Energieerhaltung liefern. Insbesondere ist der Winkel δ zwischen der Richtung der Impulse von Teilchen 1 vor und nach dem Stoß nicht eindeutig bestimmt. Er kann in den Grenzen zwischen

$$0 \leq \delta \leq \delta_{max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$$

liegen, sofern $m_1 > m_2$.

(Im Falle $m_2 > m_1$ kann das erste Teilchen nach dem Stoß sogar in jede beliebige Richtung gegenüber der Einfallsrichtung weglaufen!)
Formulierung von Impulserhaltungssatz und Energieerhaltungssatz im **Schwerpunktsystem**:
Aus der Definition der Schwerpunktskoordinaten folgt für die Geschwindigkeit $\vec{V}$ des Schwerpunktes im Laborsystem

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \, .$$

Die Impulse von Teilchen 1 und Teilchen 2 vor dem Stoß im Schwerpunktsystem sind daher

$$\vec{p}_S = \vec{p} - m_1 \cdot \vec{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{p} \qquad\qquad - m_2 \cdot \vec{V} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{p} \stackrel{!}{=} -\vec{p}_S \, .$$

Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet daher vor und nach dem Stoß. Aus dem Energiesatz folgt dann, dass im Schwerpunktsystem die Geschwindigkeiten der Teilchen stets entgegengerichtet sind und ihr Betrag beim Stoß erhalten bleibt!

Der Stoß wird also durch $|\vec{p}_S| =$ konst. beschrieben; der Vektor liegt also auf einer Kugel. über die Richtung nach dem Stoß machen Impuls- und Energiesatz wiederum keine eindeutige Aussage!

b) Es werde der Bruchteil ϵ der Anfangsenergie in andere Energieformen umgewandelt. Formulieren Sie wieder die Impuls- und Energiebilanz in Σ_L und Σ_S. Bestimmen Sie, wie die Impulse vor und nach dem Stoß in beiden Bezugssystemen miteinander zusammenhängen. Wie bewegen sich die Kugeln nach dem Stoß?

Wird ein Teil der mechanischen Enegie umgewandelt, so gilt im Schwerpunktsystem kein Energieerhaltungssatz mehr. Das bedeutet: Der Betrag $|\vec{p}_S|$bleibt nicht konstant. Geometrisch: Die Kugel in der Abbildung muss durch eine mit einem um den Faktor $\sqrt{\epsilon}$ kleineren Radius aber mit gleichem Mittelpunkt; ersetzt werden.

c) Welcher Bruchteil ϵ kann höchstens in eine andere Energieform umgewandelt werden? Bei welchem Massenverhältnis ist dieser Verlust mechanischer Energie maximal? Welche Konsequenzen hat das für die Materialauswahl für Moderatoren die in einem Kernreaktoren gebraucht werden, um schnelle Neutronen abzubremsen?

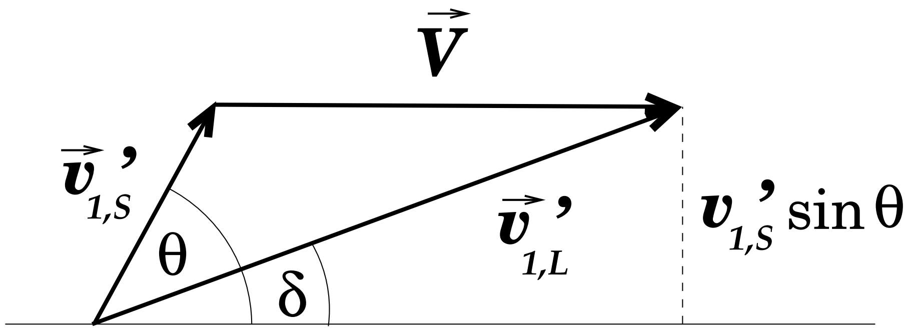
Maximaler Energieverlust liegt dann vor, wenn die Energie im Schwerpunktsystem nach dem Stoß vollkommen verschwindet. Folge: Die „Impulskugel" schrumpft zu einem Punkt zusammen; beide Teilchen bewegen sich mit gleicher Endgeschwindigkeit weiter:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{V} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\vec{p}_1}{m_1} = \frac{\vec{p}_2}{m_2} = \frac{\vec{p}}{m_1 + m_2} \, ,$$

Damit wird das (maximale) Verhältnis der Energie nach dem Stoß zur Anfangsenergie nur noch massenabhängig:

$$\epsilon \quad \equiv \quad \frac{E_{\text{nach}}}{E_{\text{vor}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \,.$$

Diskussion: Das Teilchen mit der Masse m_1 verliert (auch beim elastischen Stoß!) einen Teil seiner kinetischen Energie. Die Größe dieses Verlustes ist bei vielen Streuprozessen (z.B. beim Abbremsen von Neutronen im Kernreaktor) von Interesse. Dieser Energieverlust ist abhängig vom Winkel, um den Teilchen 1 gestreut wird. Um dies zu berechnen, ist es zweckmäßig, den Zusammenhang der Streuwinkel im Laborsystem und im Schwerpunktsystem zu untersuchen.



Aus der Abbildung ergibt sich für den Streuwinkel δ im Laborsystem, ausgedrückt durch den Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem

$$\tan\delta = \frac{\sin\theta \cdot |\vec{v}_{1,S}|}{|\vec{V}| + |\vec{v}_{1,S}|\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{m_1/m_2 + \cos\theta}. \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{V}$ wieder die Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1,S}}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v}_{1,S}.$$

Zu beachten ist wieder, dass die Streuwinkel durch Impuls- und Energiesatz nicht eindeutig bestimmt werden, wohl aber ihr Zusammenhang. Erst, wenn man für die Wechselwirkung der beiden Teilchen beim Stoßprozess ein konkretes Wechselwirkungspotential (z.B. COULOMB - Potential) zugrunde legt, können θ bzw. δ einzeln berechnet werden. Aus (1) ist abzulesen, dass im Limes eines unendlich schweren Targetteilchens m_2 die beiden Winkel übereinstimmen. Im Falle gleicher Massen folgt $\delta = \theta/2$. Der maximale Streuwinkel im Laborsystem ist dann also 90°. Aus obiger Abbildung ermittelt man für die Geschwindigkeiten $\vec{v}_{1,L}'$ und $\vec{v}_{1,L}$ von Teilchen 1 <u>nach</u> und <u>vor</u> dem Stoß (im Laborsystem)

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1,L}'^{2} &= (\vec{v}_{1,S}' + \vec{V})^2 = \vec{v}_{1,S}'^{2} \cdot \left[1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cdot \cos\theta + (\frac{m_1}{m_2})^2\right] \\ \vec{v}_{1,L}^{\,2} &= (1 + \frac{m_1}{m_2})^2 \cdot \vec{v}_{1,S}'^{2} \end{aligned}$$

Das Verhältnis der kinetischen Energien von Teilchen 1 nach und vor dem Stoß ist damit

$$\begin{aligned}\frac{E'_{kin,1}}{E_{kin,1}} &= \frac{\vec{v}_{1,L}'^2}{\vec{v}_{1,L}^2} = \frac{1+2\frac{m_1}{m_2}\cdot\cos\theta+(\frac{m_1}{m_2})^2}{(1+\frac{m_1}{m_2})^2} \\ &= 1-\frac{2\cdot(1-\cos\theta)\cdot\frac{m_1}{m_2}}{(1+\frac{m_1}{m_2})^2}\end{aligned}$$

Der Energieverlust für Teilchen 1 ist daher am größten für den Streuwinkel $\theta = \pi$ (Rückstreuung).
Im Falle gleicher Massen $\lambda \equiv m_1/m_2 = 1$ ist der Energieverlust (θ beliebig) ebenfalls maximal; im Falle $\lambda = 1$ und $\theta = \pi$ verliert das Teilchen seine gesamte kinetische Energie.
Aus diesem Grund wird ein Moderatormedium zur optimalen Abbremsung von Neutronen im Kernreaktor aus möglichst leichten chemischen Elementen bestehen (konkret: Deuterium; Wasserstoff eignet sich weniger, da er beim Stoss Neutronen einfängt).

8.3 Zwei-Teilchen-System

Es werde ein abgeschlossenes System von zwei Teilchen (Massen m_1, m_2) betrachtet, zwischen denen gravitative Wechselwirkung besteht.

a) Führen Sie analog zur Vorlesung Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein und zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße ist.

Zunächst drücken wir den Gesamtdrehimpuls des Systems mit Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ und Relativkoordinate $\vec{r}$ aus:

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\cdot\vec{R} &\equiv m_1\cdot\vec{r}_1+m_2\cdot\vec{r}_2 \qquad\qquad \vec{r}\equiv\vec{r}_2-\vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 &= \vec{R}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\vec{r} \qquad\qquad \vec{r}_2=\vec{R}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\vec{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}_1\times m_1\dot{\vec{r}}_1+\vec{r}_2\times m_2\dot{\vec{r}}_2 \\ &= \vec{R}\times(m_1+m_2)\cdot\dot{\vec{R}}+\vec{r}\times\mu\cdot\dot{\vec{r}} \qquad \text{mit} \quad \frac{1}{\mu}\equiv\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\end{aligned}$$

Damit ist der Gesamtdrehimpuls aufgeteilt in den des Schwerpunkts und den zur Relativbewegung gehörenden Drehimpuls $\vec{L}_r$.

Der Drehimpuls des Schwerpunkts bleibt erhalten, wenn am System kein äußeres Drehmoment angreift; dies ist nach Voraussetzung der Fall: abgeschlossenes System.

Der Drehimpuls der Relativbewegung bleibt erhalten, wenn gilt

$$\frac{d\vec{L}_r}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=0 \qquad \to \qquad \vec{F}=F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

Die Gravitationskraft hat die Richtung des Differenzvektors $\vec{r}$ zwischen beiden Teilchen, folglich bleibt auch der relative Drehimpuls erhalten.

b) Wie lautet für dieses System das 3. KEPLERsche Gesetz? Testen Sie dessen Gültigkeit für das System Erde - Mond.

b) Auch die Gesamtenergie E des Systems, ausgedrückt mit Schwerpunkts- und Relativkoordinate, kann in zwei entsprechende Summanden aufgeteilt werden:

$$E = \frac{m_1}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_2^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}.$$

($\alpha \equiv G \cdot m_1 \cdot m_2$). Im mitbewegten Inertialsystem (Schwerpunktsystem) ist also das ursprüngliche Zweikörperproblem reduziert worden auf ein Einteilchenproblem für die reduzierte Masse μ, das die gleiche Gestalt hat, wie das Einkörperproblem (Massenpunkt m_2 festgehalten!). Deshalb können wir alle Ergebnisse dafür (siehe Vorlesung, Kap. 1.4.2 ff) übernehmen. Man muß lediglich die Masse m_1 durch die reduzierte Masse μ ersetzen. Insbesondere folgt, dass im Falle der gebundenen Bewegung die Relativkoordinate $\vec{r}$ auf einer Ellipse liegt, wobei sich der Schwerpunkt in einem der beiden Brennpunkte befindet. Im Schwerpunktsystem ($\vec{R}(t) = 0$) gibt dann die Rückrechnung auf die Koordinaten der beiden Körper

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}.$$

Damit sind also auch die Bahnen von m_1 und m_2 Ellipsen. Beide Körper bewegen sich um den Schwerpunkt, der im Brennpunkt beider Ellipsenbahnen liegt, wobei der Brennpunkt immer zwischen den den beiden Massen befindet. Aus der Erhaltung des Betrags von $\vec{L}_r$ ergibt sich dann für die vom Differenzvektor $\vec{r}$ überstrichene Fläche $d|\vec{f}|$ der Flächensatz

$$|\vec{L}_r| = \mu|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}| = 2\mu\frac{d|\vec{f}|}{dt} = \text{konstant} = 2\mu \cdot \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

mit der in der Umlaufzeit T überstrichenen Ellipsenfläche. Weiterhin ist (siehe Vorlesung)

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} \qquad b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad \rightarrow \quad a \cdot b = a^{3/2} \cdot \sqrt{k} = a^{3/2} \cdot \frac{|\vec{L}_r|}{\sqrt{\mu \cdot \alpha}}$$

und damit nach Quadrieren

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \cdot \mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_2(1 + m_1/m_2)}.$$

Bei sehr unterschiedlichen Massen ist das Verhältnis T^2/a^3 nur von einer der beiden Massen bestimmt (Beispiel: Sonne - Planeten). Im Falle des Systems Erde-Mond dagegen müssen beide Massen berücksichtigt werden. Mit den Werten

- Masse der Erde $m_E = 5{,}974200 \cdot 10^{24} kg$
- Masse des Mondes $m_M = 7{,}3483 \cdot 10^{22} kg$
- Umlaufzeit des Mondes (siderischer Monat!) $T = 27{,}321662 d = 2{,}354146 \cdot 10^6 s$

- große Halbachse der Mondbahn $a = 3,84401 \cdot 10^8 m$ (siehe z.B. unter www.calsky.com)
- Gravitationskonstante (s. Phys.-Techn. Bundesanstalt, Braunschweig) $G = 6,6742(10) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

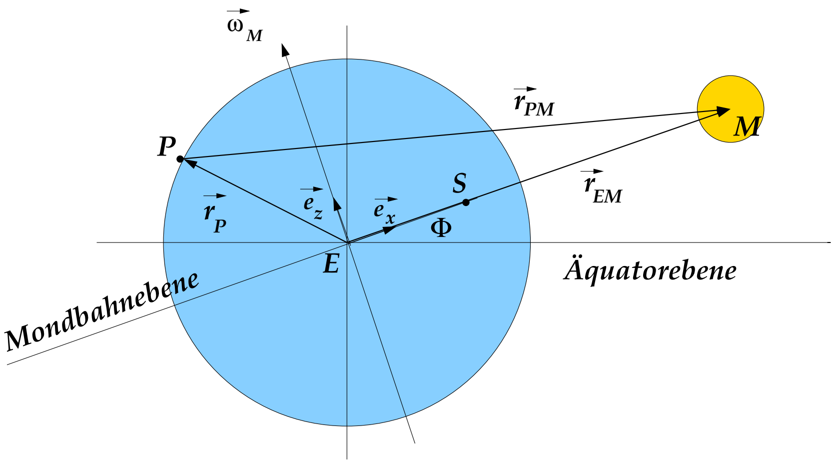
ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi^2}{G \cdot (m_E + m_M})) &= 9,7807 \cdot 10^{-14} s^2 m^{-3} \\
\frac{4\pi^2}{G \cdot m_E} &= 9,901 \cdot 10^{-14} s^2 m^{-3} \\
T^2/a^3 &= 9,757 \cdot 10^{-14} s^2 m^{-3}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass für dieses System T^2/a^3 nicht durch die Masse des „Zentralkörpers“ allein bestimmt wird; hier gilt eben **nicht**, wie für das System Sonne - Planet, $m_1 \ll m_2$. Das Verhältnis T^2/a^3 hat also z.B. nicht für alle (auch künstlichen!) Erdsatelliten denselben Wert!

8.4∗ Gezeiten

Allgemein bekannt ist, dass die Gezeiten von der Anziehungskraft des Mondes herrühren. Auf den ersten Blick würde man erwarten, daß man einmal pro Tag Ebbe und einmal Flut hat, da sich die Erde in 24 Stunden einmal um sich selber dreht. Wie so oft trügt der „erste Blick“: Es gibt zweimal Ebbe und zweimal Flut pro Tag.
Finden Sie eine Lösung für diesen scheinbaren Widerspruch, indem Sie die Kräfte auf Wasserelemente an der Erdoberfläche im Schwerpunktsystem von Erde und Mond betrachten (Prinzip-Skizze!).



In den Aufgaben 7.2 und 7.3 haben wir uns davon überzeugt, daß die täglich Rotation der Erde und die Gravitationskräfte der Erde dazu führen, daß die Erdoberfläche die Gestalt einer Äquipotentialfläche zum Potential der Gewichtskraft $m\vec{g}$ annimmt. Für die Berechnung der Gezeitenkräfte, die durch den Mond bewirkt werden kann deshalb die Rotation der Erde um ihre Achse vernachlässigt werden. Die Gezeitenkräfte setzen sich zusammen aus der Zentrifugalkraft infolge Revolution, also der Bewegung der Erde als starres Gebilde um den gemeinsamen Schwerpunkt S von Erde und Mond. Dabei bewegen sich alle

Massepunkte auf der Erde unabhängig von ihrer Position im Erdkörper auf Kreisbahnen mit demselben Radius (Abstand Erdmittelpunkt zu Schwerpunkt) und derselben Winkelgeschwindigkeit ω_M. Demzufolge ist auch die durch die Revolution der Erde bewirkte Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ für alle Teilchen gleich. Da das System Erde-Mond als abgeschlossen betrachtet wird, muß die Kraftsumme im Schwerpunktsystem verschwinden, d.h die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond $F_{G,EM}$ muß also die Zentrifugalkraft kompensieren. Damit ergibt sich die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}_R$ der Erdmittlepunktes zu

$$\vec{\alpha}_R = \frac{\vec{F}_Z}{M_E} = -\frac{\vec{F}_{G,EM}}{M_E} .$$

Im Gegensatz zur Zentrifugalkraft infolge Revolution hängt die Gravitationskraft des Mondes von der Position des betrachteten Massepunktes auf der Erde ab. Wir legen nun das Koordinatensystem so fest, dass der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt, die x-Achse in Richtung Mondmittelpunkt M und die z-Achse normal zur Mondbahnebene (d.h. parallel zum Drehimpuls des Zweikörperproblems, vergleiche Aufgabe 8.3) orientiert wird. Die Zentrifugalkraft auf eine Masse m am Punkt P der Erdoberfläche mit der geographischen Länge ϕ und der geographischen Breite θ ist damit

$$\vec{F}_{Z,P} = m\vec{\alpha}_R = -\frac{m}{M_E}\vec{F}_{G,EM} = -\frac{m}{M_E}\gamma\frac{M_E M_M}{r_{EM}^2}\vec{e}_x = -\gamma\frac{mM_M}{r_{EM}^2}\vec{e}_x .$$

Die Gravitationskraft, die der Mond auf die Masse m ausübt ist

$$\vec{F}_{G,PM} = \gamma\frac{mM_M}{r_{PM}^3}\vec{r}_{PM}$$

Die Summe der Kräfte bezogen auf die Zentrifugalkraft ergibt sich also

$$\vec{f} := \frac{\vec{F}}{m\alpha_R} = -\vec{e}_x + \frac{R^2}{r_{PM}^3}\vec{r}_{PM}$$

Bezeichnet man den Vektor zum Punkt P mit $\vec{r}_P$, so findet man

$$\vec{r}_{EM} = \vec{r}_{PM} + \vec{r}_P \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}_{PM} = \vec{r}_{EM} - \vec{r}_P$$

Drückt man den Vektor $\vec{r}_P$ über geographische Länge und Breite aus findet man

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r}_{PM} = \begin{pmatrix} R - r\cos\phi\cos\theta \\ -r\sin\phi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} ,$$

wobei r den Erdradius und R den (mittleren) Abstand Erde-Mond bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\vec{f} = -\vec{e}_x + \frac{R^2}{(R^2 - 2rR\vec{e}_x\vec{e}_r + r^2)^{3/2}}(R\vec{e}_x - r\vec{e}_r) .$$

Indem wir das Radiusverhältnis $\delta = r/R$ als kleinen Parameter ($\delta \approx 1/60$) einführen

$$\vec{f} = -\vec{e}_x + \frac{1}{(1 - 2\delta\vec{e}_x\vec{e}_r + \delta^2)^{3/2}}(\vec{e}_x - \delta\vec{e}_r)$$

und $\vec{f}$ danach bis zur ersten Ordnung in δ entwickeln, ergibt sich

$$\vec{f} \approx -\vec{e}_x + (1 + 3\delta\vec{e}_x\vec{e}_r)(\vec{e}_x - \delta\vec{e}_r) = \delta\,(3\vec{e}_x\,(\vec{e}_x\vec{e}_r) - \vec{e}_r) .$$

Die Normalkomponente der Kraft $\vec{F}$ trägt nicht zu Wasserverschiebungen auf der Erdoberfläche bei, sondern ändert lediglich $\vec{g}$ um einen winzigen Bruchteil. Für die Gezeiten interessiert deshalb die Projektion der Kraft auf die Tangentialebene im Punkt (ϕ, θ). Diese gewinnt man, wenn man die Kraft mit $\vec{e}_\phi$ bzw. $\vec{e}_\theta$ multipliziert

$$\vec{F}_\perp / m\alpha_R = f_\phi \vec{e}_\phi + f_\theta \vec{e}_\theta \,.$$

Mit

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(beachte, daß θ vom Äquator aus gemessen und nach Norden positiv gezählt wird!), ergibt sich

$$\vec{f}\vec{e}_\phi = \delta\left(3\vec{e}_x\left(\vec{e}_x\vec{e}_r\right) - \vec{e}_r\right)\vec{e}_\phi = 3\delta(\vec{e}_\phi\vec{e}_x)\left(\vec{e}_x\vec{e}_r\right) = -3\delta\sin\phi\cos\phi\cos\theta = -\frac{3}{2}\delta\sin 2\phi\cos\theta$$

bzw.

$$\vec{f}\vec{e}_\theta = \delta\left(3\vec{e}_x\left(\vec{e}_x\vec{e}_r\right) - \vec{e}_r\right)\vec{e}_\theta = 3\delta(\vec{e}_\theta\vec{e}_x)\left(\vec{e}_x\vec{e}_r\right) = -3\delta\cos\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{2}\delta\cos^2\phi\sin 2\theta \,.$$

An der azimutalen Komponente der Kraft kann man sofort ablesen, dass es zwei Minima und Maxima gibt, was zu zwei Flutbergen auf der Erde führt.

Bedenkt man nun noch, daß sich die Erde in 24h einmal um sich selbst dreht, so ist klar, daß etwa alle 12 Stunden Flut bzw. Ebbe ist.
Die wirklichen Strömungsverhältnisse auf der Erde sind so kompliziert, daß eine Berechnung aus ersten Prinzipien in absehbarer Zeit jenseits der Möglichkeiten der theoretischen Mechanik liegen. Eine gute Übersicht über die realen Verhältnisse mit schönen Bildern und Animationen findet man u.a. unter *de.wikipedia.org/wiki/Gezeiten*.