

## Theoretische Mechanik

### 12. Übung

#### 12.1 Drehimpulsalgebra

- a) Beweisen Sie für die kartesischen Drehimpulskomponenten  $L_i = \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot p_k$  allein mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen algebraischen Relationen für POISSON - Klammern und der fundamentalen POISSON - Klammern für  $p_i, x_j$  die Relation

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} \cdot L_k \quad \epsilon_{ijk} - \text{LEVI-CIVITA-Symbol.}$$

In der Literatur finden sich zwei verschiedene Definitionen der POISSON-Klammern, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden (siehe z.B. Landau-Lifshits, Mechanik, 1964, Seite 157 ff.) In der Vorlesung wurde definiert:

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

mit den fundamentalen POISSON-Klammern

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}.$$

Mit dieser Definition erhält die in der Aufgabenstellung zu beweisende Relation für die POISSON-Klammer der Drehimpulskomponenten ein anderes Vorzeichen! Zum Beweis der angegebenen Relation gibt es zwei Möglichkeiten:

- Berechnung der POISSON-Klammer für einen Spezialfall in kartesischen Koordinaten, dann die Koordinaten zyklisch vertauschen,
- kompakte Berechnung der POISSON-Klammer unter Verwendung der Eigenschaften des  $\epsilon$ -Symbols.

#### 1. Lösungsvariante

$$\{L_x, L_y\} \stackrel{?}{=} L_z$$

$$\{L_x, L_y\} = \{yp_z - zp_y, L_y\} = y \cdot \{p_z, L_y\} + p_z \cdot \{y, L_y\} - z \cdot \{p_y, L_y\} - p_y \cdot \{z, L_y\}.$$

Für die einzelnen POISSON-Klammern erhält man:

$$\{p_z, L_y\} = \{p_z, zp_x - xp_z\} = -z \{p_x, p_z\} - p_x \{z, p_z\} + x \{p_z, p_z\} + p_z \{x, p_z\} = -p_x.$$

$$\{y, L_y\} = -z \{p_x, y\} - p_x \{z, y\} + x \{p_z, y\} + p_z \{x, y\} = 0.$$

$$\{p_y, L_y\} = -z \{p_x, p_y\} - p_x \{z, p_y\} + x \{p_z, p_y\} + p_z \{x, p_y\} = 0.$$

$$\{z, L_y\} = -z \{p_x, z\} - p_x \{z, z\} + x \{p_z, z\} + p_z \{x, z\} = -x.$$

Damit erhält man

$$\{L_x, L_y\} = -yp_x + xp_y = L_z \quad \text{q.e.d..}$$

Zyklisches Vertauschen bestätigt die angegebene Relation.

2. Lösungsvariante

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ikl} \{x_k p_l, L_j\} = \epsilon_{ikl} \cdot [x_k \{p_l, L_j\} + p_l \{x_k, L_j\}].$$

Mit

$$\{L_j, p_l\} = \epsilon_{jmn} \{x_m p_n, p_l\} = \epsilon_{jmn} p_n \{x_m, p_l\} = \epsilon_{jmn} \cdot p_n \delta_{lm} = \epsilon_{jln} \cdot p_n$$

und

$$\{L_j, x_k\} = \epsilon_{jmn} \{x_m p_n, x_k\} = \epsilon_{jmn} x_m \{p_n, x_k\} = -\epsilon_{jmn} x_m \delta_{nk} = -\epsilon_{jmk} x_m$$

erhalten wir zunächst

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ikl} \cdot [-x_k p_n \epsilon_{jln} + \epsilon_{jmk} x_m p_l].$$

Zur weiteren Auswertung benötigen wir eine wichtige Eigenschaft des Produktes zweier  $\epsilon$ -Tensoren (wobei über den Index  $k$  zu summieren ist!):

$$\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Damit ergibt sich

$$\{L_i, L_j\} = -x_k p_n [\delta_{in} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kn}] + x_m p_l [\delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{lm} \delta_{ji}] = x_i p_j - p_i x_j \stackrel{!}{=} \epsilon_{ijk} \cdot L_k.$$

Im letzten Gleichheitszeichen wurde die Eigenschaft des Produktes der  $\epsilon$ -Symbole nochmal verwendet.

- b) Die HAMILTON-Funktion eines Teilchens lautet  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$ . Zeigen Sie, dass speziell für ein Zentralpotential  $U = U(r)$

$$\{H, L_k\} = 0 \quad \left\{ H, |\vec{L}|^2 \right\} = 0$$

gilt. Welche Konsequenz hat das für die Zeitabhängigkeit des Drehimpulses?

Zur Berechnung der POISSON-Klammer werden die POISSON-Klammern der kinetischen Energie und des Potentials mit der Drehimpulskomponente getrennt berechnet:

$$\{\vec{p}^2, L_k\} = \{p_l p_l, L_k\} = 2p_l \{p_l, L_k\} = 2p_l p_n \epsilon_{kln} = 0$$

$$\{L_k, U(r)\} = \epsilon_{klm} \cdot \{x_l p_m, U(r)\} = \epsilon_{klm} x_l \{p_m, U(r)\}.$$

Mit der Definition der POISSON-Klammer erhält man dafür

$$\{L_k, U(r)\} = \epsilon_{klm} x_l \cdot \left\{ \frac{\partial p_m}{\partial q_i} \frac{\partial U(r)}{\partial p_i} - \frac{\partial p_m}{\partial p_i} \frac{\partial U(r)}{\partial q_i} \right\} = -\epsilon_{klm} x_l \frac{\partial U(r)}{\partial q_m}$$

und mit dem Gradienten des Potentials

$$\{L_k, U(r)\} = \epsilon_{klm} x_l F_m = \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)_k$$

die  $k$ -te Komponente des Drehmomentes. Da  $\vec{F}$  eine Zentralkraft ist, verschwindet dieses Drehmoment; der Drehimpuls ist demnach eine Erhaltungsgröße.

Ebenso verschwindet auch die POISSON-Klammer von HAMILTON-Funktion und Drehimpulsquadrat.

**Bemerkung:** Die benutzte Relation für das Produkt zweier  $\epsilon$ -Tensoren und einige weitere Eigenschaften dieser Größe lassen sich mit dem Kreuzprodukt und dem doppelten Kreuzprodukt von Vektoren beweisen.

Mit der angegebenen Definition von  $\epsilon_{ijk}$  kann für das Kreuzprodukt zweier Einheitsvektoren die Darstellung

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \epsilon_{jkl} \vec{e}_l$$

gefunden werden, denn es ist einerseits

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} a_j b_k &= \epsilon_{jki} a_j b_k = a_j b_k \epsilon_{jkl} \delta_{li} \\ &= a_j b_k (\epsilon_{jkl} \vec{e}_l) \cdot \vec{e}_i \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \left( \vec{a} \times \vec{b} \right)_i &= \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{e}_i = (a_j \vec{e}_j \times b_k \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_i \\ &= a_j b_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Damit kann das doppelte Kreuzprodukt in der Form

$$\vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \vec{e}_i \times \vec{e}_l \epsilon_{jkl} = \vec{e}_m \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkl} \quad (1)$$

geschrieben werden. Andererseits kann man es mit dem Zerlegungssatz umformen:

$$\vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \vec{e}_j \cdot (\vec{e}_i \vec{e}_k) - \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \vec{e}_j) = \vec{e}_j \cdot \delta_{ik} - \vec{e}_k \cdot \delta_{ij}.$$

Beachtet man, dass sich jeder Vektor als Linearkombination von (linear unabhängigen) Basisvektoren  $\vec{e}_m$  darstellen läßt, findet man mit

$$\vec{e}_j = \vec{e}_m \cdot (\vec{e}_j \vec{e}_m) = \vec{e}_m \cdot \delta_{jm} \quad \vec{e}_k = \vec{e}_m \cdot (\vec{e}_k \vec{e}_m) = \vec{e}_m \cdot \delta_{km}$$

schließlich

$$\vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \vec{e}_m \cdot \{ \delta_{jm} \delta_{ik} - \delta_{km} \delta_{ij} \}. \quad (2)$$

Durch Vergleich von (1) und (2) und einfaches Umbenennen der Indizes ergibt sich dann die zu beweisende Relation

$$\epsilon_{ijm} \cdot \epsilon_{klm} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} - \delta_{il} \cdot \delta_{jk}.$$

Anwendung dieser Beziehung auf das Produkt  $\epsilon_{ijm} \cdot \epsilon_{kjm}$  liefert

$$\epsilon_{ijm} \cdot \epsilon_{kjm} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jj} - \delta_{ij} \cdot \delta_{jk} \stackrel{!}{=} 3 \cdot \delta_{ik} - \delta_{ik} = 2 \cdot \delta_{ik} \quad (\text{q.e.d.})$$

und damit wiederum

$$\epsilon_{ijm} \cdot \epsilon_{ijm} = 2 \cdot \delta_{ii} = 6 \quad (\text{q.e.d.}) \quad .$$

## 12.2 Kanonische Transformation (I)

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen für die Parameter  $\mu$  und  $\lambda$

$$Q = \frac{1}{\mu} \cdot \arctan\left(\frac{\lambda q}{p}\right) \qquad P = \frac{1}{2} \cdot (p^2 + \lambda^2 q^2)$$

eine kanonische Transformation ist. Zeigen Sie dazu insbesondere, dass die Erzeugende  $G(Q, q)$  die Form

$$G(Q, q) = \frac{\lambda}{2} \cdot q^2 \cdot \cot(\mu Q)$$

hat. Nutzen Sie diese Transformation, um die Zeitabhängigkeit von Ort und Impuls für den eindimensionalen harmonischen Oszillator zu bestimmen.

Wie stellt man fest, ob eine Transformation eine kanonische Transformation ist?

- Entweder versucht man, die Erzeugende einer vorgegebenen Transformation zu finden, oder
- man nutzt die Invarianz der POISSON-Klammern unter einer kanonischen Transformation.

Da hier die Erzeugende  $G(Q, q)$  vorgegeben ist, untersuchen wir, ob die partiellen Ableitungen dieser Erzeugende die Gleichungen

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

erfüllen. Wir erhalten

$$p = p(Q, q) = \lambda \cdot q \cdot \cot \mu Q \qquad P = P(Q, q) = \frac{\lambda}{2} q^2 \cdot \frac{\mu}{\sin^2 \mu Q}$$

Es wird die vorgegebene Transformation nach  $p = p(Q, q)$  und nach  $P(Q, q)$  umgestellt und mit diesen Ausdrücken verglichen:

$$Q = \frac{1}{\mu} \cdot \arctan \frac{\lambda q}{p} \qquad \rightarrow \qquad p(Q, q) = \lambda q \cdot \cot \mu Q$$

und

$$P = \frac{1}{2} \cdot (p^2 + \lambda^2 q^2) = \frac{\lambda^2}{2} q^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \mu Q}$$

Der Vergleich zeigt, dass die noch offenen Parameter in der Transformation die Bedingung

$$\lambda = \mu$$

erfüllen müssen.

Die Untersuchung der POISSON-Klammer

$$\{Q, P\} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$$

ergibt beim Einsetzen der gegebenen Transformation

$$\{Q, P\} = \frac{\lambda}{\mu},$$

woraus wiederum die oben angegebene Forderung folgt.

Ziel einer kanonischen Transformation ist die systematische Suche nach Erhaltungsgrößen für ein gegebenes mechanisches System.

Mit der vorgegebenen Transformation wird aus der HAMILTON-Funktion

$$H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

für den harmonischen Oszillator mit  $\lambda = \mu = m\omega$  eine neue HAMILTON-Funktion gebildet:

$$K(Q, P, t) = \frac{1}{2m} (p^2 + \lambda^2 q^2) = \frac{P}{m}.$$

Die kanonischen Gleichungen für diese HAMILTON-Funktion haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{1}{m} & \rightarrow & \quad Q(t) = \frac{t - t_0}{m}. \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 & \rightarrow & \quad P(t) = c = \text{konst.} \end{aligned}$$

Setzen wir  $Q(t)$  in die Transformationsgleichung  $Q(q, p)$  ein, erhalten wir die Zeitabhängigkeit des ursprünglichen generalisierten Impulses:

$$p(t) = m\omega q(t) \cdot \cot [\omega (t - t_0)].$$

Aus

$$P = \frac{m^2\omega^2 q^2}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 [\omega (t - t_0)]} \stackrel{!}{=} \text{konst.}$$

erhält man für die generalisierte Koordinate  $q(t)$

$$q(t) = \frac{\sqrt{2P}}{m\omega} \cdot \sin [\omega (t - t_0)]$$

und

$$p(t) = \sqrt{2P} \cdot \cos [\omega (t - t_0)].$$

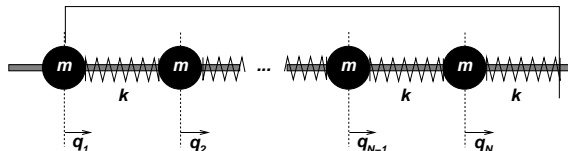
Die hier enthaltenen Konstanten  $P$  und  $t_0$  lassen sich z.B. durch die Anfangswerte  $p(0)$  und  $q(0)$  ausdrücken. Mit dem Ergebnis für  $p(t)$  und  $q(t)$  folgt

$$\frac{q(t)^2}{2P/m^2\omega^2} + \frac{p(t)^2}{2P} = 1.$$

Hieraus ist abzulesen, dass die dynamischen Zustände des harmonischen Oszillators im Phasenraum auf Ellipsen mit den Halbachsen  $\sqrt{2P}/m\omega$  und  $\sqrt{2P}$  liegen. Jede der Ellipsen wird durch einen Energiewert  $E = H = P/m = \text{konst.}$  als Parameter charakterisiert.

### 12.3 Oszillatorkette

$N$  gleiche Massen, die auf einer Stange reibungsfrei gleiten können, seien durch  $N$  gleiche Federn untereinander verbunden, wobei die Kraft der  $N$ -ten Feder durch eine geeignete masselose Apparatur zur ersten Masse zurückgeführt wird.



- a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Problems, wobei Sie die LAGRANGE-Funktion aus Aufgabe 11.2 nutzen können.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N p_j^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N (q_{j+1} - q_j)^2 \quad \text{mit} \quad q_{N+1} = q_1 \quad (3)$$

- b) Prüfen Sie ob die Transformation

$$Q_m(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jm} q_j$$

$$P_m(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} p_j$$

kanonisch ist! Vorübung: Überzeugen Sie sich davon, daß die Transformierten der Quadrate  $q_j^2$  und  $p_j^2$  in den neuen Koordinaten wiederum reell sind. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}j(m-n)} = \delta_{n,m}$$

gilt, und benutzen Sie das, um die Umkehrtransformation herzuleiten und zu beweisen, daß aus  $q_j = q_j^*$  die Beziehung  $Q_m^* = Q_{-m}$  folgt!

Eine Transformation ist kanonisch, wenn die folgenden Relationen für die POISSON-Klammern der neuen Koordinaten gelten.

$$\{Q_m, P_n\} = \delta_{m,n} \quad \text{und} \quad \{Q_m, Q_n\} = \{P_m, P_n\} = 0.$$

Mit

$$\frac{\partial Q_m}{\partial q_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jm} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jm} \delta_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}km}$$

bzw.

$$\frac{\partial P_n}{\partial p_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} \delta_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

und

$$\frac{\partial Q_m}{\partial p_l} = \frac{\partial P_n}{\partial q_k} = 0$$

sieht man sofort, daß die POISSON-Klammern für zwei Koordinaten bzw. zwei Impulse verschwinden. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \{Q_m, P_n\} &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial Q_m}{\partial q_k} \frac{\partial P_n}{\partial p_k} - \frac{\partial P_n}{\partial q_k} \frac{\partial Q_m}{\partial p_k} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Die Transformation ist also kanonisch.

- c) Benutzen Sie die angegebene Transformation um die HAMILTONfunktion in den neuen Koordinaten auszudrücken.

Um die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten auszudrücken, benötigt man zunächst die Umkehrtransformationen. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned} q_j(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} Q_m \\ p_j(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jm} P_m \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie findet man damit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jm} P_m \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}jn} P_n \right) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}j(m+n)} P_m P_n}_{\delta_{-m,n}} = \frac{1}{2m} \sum_{m=1}^N P_m P_{-m} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{m=1}^N P_m P_m^* = \frac{1}{2m} \sum_{m=1}^N |P_m|^2. \end{aligned}$$

Für die potentielle Energie erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N (q_{j+1}^2 - q_{j+1}q_j - q_jq_{j+1} + q_j^2) \\
 &= \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+1)m} Q_m \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+1)n} Q_n \right) \\
 &\quad - \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+1)m} Q_m \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jn} Q_n \right) \\
 &\quad - \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} Q_m \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j+1)n} Q_n \right) \\
 &\quad + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jm} Q_m \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}jn} Q_n \right) \\
 &= \frac{k}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N Q_m Q_n \left( e^{-i\frac{2\pi}{N}(m+n)} - e^{-i\frac{2\pi}{N}m} - e^{-i\frac{2\pi}{N}n} + 1 \right) \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}j(m+n)}}_{\delta_{-m,n}} \\
 &= \frac{k}{2} \sum_{m=1}^N Q_m Q_{-m} \left( 2 - \underbrace{\left( e^{-i\frac{2\pi}{N}m} + e^{i\frac{2\pi}{N}m} \right)}_{2 \cos \frac{2\pi}{N}m} \right) \\
 &= k \sum_{m=1}^N Q_m Q_m^* \left( (1 - \cos \left( \frac{2\pi m}{N} \right)) \right) = 2k \sum_{m=1}^N \sin^2 \left( \frac{\pi m}{N} \right) |Q_m|^2.
 \end{aligned}$$

Die HAMILTONfunktion zerfällt also in eine Summe von N Termen, die jeweils nur von einer Koordinate und dem dazugehörigen kanonischen Impuls abhängen. Man sieht weiterhin, daß die Phasen aller Koordinaten zyklische Koordinaten sind, da die neue Hamiltonfunktion und damit auch die neue Lagrangefunktion von diesen Phasen nicht abhängt. Diese sind konstant und können ohne weiteres 0 gesetzt werden, da sie mit dem Bewegungsproblem nichts zu schaffen haben. Damit können also die neuen Variablen und Impulse reell gewählt werden.

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^N \left( \frac{P_l^2}{2m} + 2k \sin^2 \left( \frac{\pi l}{N} \right) Q_l^2 \right).$$

c) Wie sehen die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen aus?

Die  $2N$  kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_l} = \frac{P_l}{m} \quad \text{und} \quad \dot{P}_l = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_l} = -4k \sin^2 \left( \frac{\pi l}{N} \right) Q_l.$$



Indem man die erste differenziert und die zweite einsetzt, erhält man  $N$  unabhängige Bewegungsgleichungen für harmonische Oszillatoren

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_l = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi l}{N}\right) \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

### 12.4\* Kanonische Transformation (II)

Die LAGRANGEfunktion eines Systems mit einem mechanischen Freiheitsgrad habe die Form

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}(\alpha \cdot \dot{x}^2 - \beta \cdot x^2) \cdot e^{\gamma t} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

- a) Wie lauten die EULER-LAGRANGE-Gleichungen? Wie lautet der generalisierte (kanonische) Impuls? Charakterisieren Sie das durch  $\mathcal{L}$  beschriebene System!

Einsetzen in die LAGRANGE-Gleichung ergibt die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}(\alpha \dot{x} e^{\gamma t}) = \alpha \ddot{x} e^{\gamma t} + \alpha \gamma \dot{x} e^{\gamma t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -\beta x e^{\gamma t} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\beta}{\alpha} x = 0. \end{aligned}$$

Der kanonische Impuls ist

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} e^{\gamma t}.$$

Es handelt sich bei dem (durch die explizit zeitabhängige LAGRANGE-Funktion) beschriebenen System um einen eindimensionalen, harmonischen Oszillator mit geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft (STOKES-Reibung).

- b) Finden Sie die HAMILTONfunktion  $H(p, q, t)$ !

Mit Hilfe des kanonischen Impulses kann die verallgemeinerte Geschwindigkeit  $\dot{x}$  eliminiert werden, und man erhält die HAMILTON-Funktion

$$H(p, q, t) = H(p, x, t) = p \cdot \dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{p^2}{2\alpha} e^{-\gamma t} + \frac{\beta x^2}{2} e^{\gamma t}.$$

Die HAMILTON-Funktion ist explizit zeitabhängig!

Damit ist  $H$  keine Erhaltungsgröße.

- c) Wie lauten die HAMILTONschen Gleichungen? Untersuchen Sie  $dH/dt$ !

Die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\beta x e^{\gamma t} \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\alpha} e^{-\gamma t} \\ \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial t} = \gamma \cdot H - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot p^2 \cdot e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

Ableitung der ersten Gleichung nach  $t$  und Einsetzen der zweiten Gleichung ergibt wieder die NEWTONSche Bewegungsgleichung. Die dritte der HAMILTONSchen Gleichung enthält die Energiebilanz des gedämpften Oszillators:

$$E \equiv \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + \frac{\beta}{2}x^2 = \frac{p^2}{2\alpha}e^{-2\gamma t} + \frac{\beta}{2}x^2 = e^{-\gamma t} \cdot H$$

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t} H + \frac{dH}{dt} e^{-\gamma t} = -\gamma e^{-\gamma t} H + e^{-\gamma t} \cdot \left[ \gamma H - \frac{\gamma}{\alpha} p^2 e^{-\gamma t} \right] = -\alpha \gamma \dot{x}^2 < 0$$

(Leistung der Reibungskraft).

d) Die HAMILTON-Funktion soll in neue Koordinaten, die gemäß

$$Q \equiv q e^{\gamma t} \qquad P \equiv p \cdot e^{-\gamma t}$$

definiert sind, umgeschrieben werden. Die Umbenennung der Koordinate  $x$  in  $q$  wurde hier vorgenommen, damit sich eine größere Nähe zur in der Literatur üblichen und der Vorlesung verwendeten Bezeichnung ergibt. Weisen Sie zunächst nach, daß es sich dabei um eine kanonische Transformation handelt! Finden Sie die transformierte HAMILTON-Funktion  $K(Q, P, t)$  und untersuchen Sie  $dK/dt$ .

Der Nachweis, dass es sich bei der angegebenen Transformation um eine kanonische Transformation handelt, kann geführt werden, indem

- man entweder die transformierte HAMILTON-Funktion  $K(P, Q, t)$  und die Gültigkeit der HAMILTONSchen Bewegungsgleichung in den neuen Koordinaten nachweist, oder
- ausnutzt, dass der Wert der POISSON-Klammern, insbesondere der POISSON-Klammer  $\{q, p\} = \{Q, P\} = 1$  sich unter einer kanonischen Transformation nicht ändert.

Letztgenannter Weg ergibt nach Einsetzen von  $Q = qe^{\gamma t}, P = pe^{-\gamma t}$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \stackrel{!}{=} 1.$$

Damit ist die vorgegebene Transformation kanonisch.

Die transformierte HAMILTON-Funktion ergibt sich aus der Erzeugenden  $F(P, q, t)$  der Transformation:

$$K(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = P e^{\gamma t} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P} = q e^{\gamma t}$$

$$\rightarrow F(P, q, t) = q \cdot P \cdot e^{\gamma t} \qquad \rightarrow K(P, Q, t) = \frac{P^2}{2\alpha} e^{\gamma t} + \frac{\beta Q^2}{2} e^{-\gamma t} + \gamma P Q.$$

Die transformierte HAMILTON-Funktion ist ebenfalls explizit zeitabhängig. Auch sie ist deshalb keine Erhaltungsgröße.

Wird die vorgegebene Transformation abgeändert in die kanonische Transformation

$$Q = q e^{\gamma/2 t} \qquad P = p e^{-\gamma/2 t},$$

so ergibt sich

$$K(P, Q, t) = \frac{P^2}{2\alpha} + \frac{\beta Q^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \cdot PQ,$$

also eine explizit zeitunabhängige neue HAMILTON-Funktion, die eine Erhaltungsgröße ist:  $K(P, Q, t) = \text{konstant}$ .

In den ursprünglichen Koordinaten  $x, \dot{x}$  dargestellt, ist dies der Ausdruck

$$K = K_0 = \frac{\alpha}{2} \dot{x}^2 e^{-\gamma t} + \frac{\beta x^2}{2} e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{2} \alpha x \dot{x} = \text{konstant}.$$