Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

14. Übung Lösungen

14.1 Relativistische Kinematik

Ein ICE (Länge in seinem Ruhsystem $L_0 = 100$ m) führt mit $v = 360$ km/h auf einer geraden Strecke. Entlang der Strecke sind extrem genaue Lichtschranken und synchronisierte Uhren aufgebaut. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden damit die Ortskoordinaten $x_B$und x_H von Bug und Heck des Zuges genau vermessen. Auch an Bug und Heck des Zuges sind synchronisierte Uhren

a) Bestimmen Sie die gemessene Länge $L = x_B - x_H$. Wie groß ist die Zeitdifferenz zwischen den Messungen, vom Zug aus beurteilt?

Zu benutzen ist die Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma \cdot (x - vt) \qquad t' = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2}x) \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Bezeichnung der Bezugssysteme: $\Sigma-$ Bahndamm, $\Sigma'-$ Zug.
Damit folgt

$$L_0 = x'_B - x'_H = \gamma \cdot [x_B - x_H - v(t_B - t_H))] = \gamma \cdot L > L.$$

numerisch:

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx L_0 \cdot \sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-14}} \approx L_0 \cdot \left(1 - \frac{9}{2} \cdot 10^{-14}\right).$$

Für die Zeitdifferenz ergibt sich

$$\Delta t' = \gamma \left[(t_B - t_H) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_H)\right] = -\gamma \frac{v}{c^2} L = -\frac{v}{c^2} L_0,$$

womit auch die Invarianz des Raum-Zeit-Abstandes erfüllt ist:

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \qquad 0 - L^2 = (c\Delta t')^2 - L_0^2 \quad \text{Kreisgleichung} \qquad 1 = \left(\frac{c\Delta t'}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{L}{L_0}\right)^2.$$

numerisch: $\Delta t' \approx 10^{-13}$ s. Das negative Vorzeichen ist anschaulich verständlich: Vom Bezugssystem Σ' aus betrachtet, läuft der Punkt x_B einem Lichtsignal entgegen, das vom Punkt $(x_B + x_H)/2$ in der Mitte zwischen x_B und x_H in positive x - Richtung läuft (Gleichzeitigkeit im System Σ!). Es trifft deshalb früher dort ein als das andere Lichtsignal bei x_H.

b) Auf dem Nachbargleis komme ein Zug mit der Geschwindigkeit $v = 360$ km/h entgegen. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit V_R beider Züge, von der Bahnstrecke aus und im Ruhsystem des ersten Zuges gemessen?

Zu beachten ist: Die Relativgeschwindigkeit ist i.a. **nicht** einfach die Differenz zweier Geschwindigkeiten!
Von der Bahnstrecke aus kann man nur diese Differenz $V_R = 720$ km/h angeben; messbar

sind ja nur die Geschwindigkeiten beider Züge. Vom Ruhsystem des ersten Zuges aus muss dagegen das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten benutzt werden!

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \,.$$

(Siehe Abbildung zu 14.2) Es bedeuten dabei: v - Geschwindigkeit eines Teilchens relativ zu Σ, v_1 - Geschwindigkeit des Systems Σ' relativ zu Σ, v_2 - Geschwindigkeit des Teilchens relativ zu Σ'. Hier benutzen wir die Zuordnung: v_1 - Geschwindigkeit des Zuges relativ zu Σ , v - Geschwindigkeit des entgegenkommenden Zuges relativ zu Σ, d.h. $v = -v_1$; v_2 - gesuchte Relativgeschwindigkeit des entgegenkommenden Zuges gemessen von Σ' aus: $v_2 = V_R'$. Damit ergibt sich

$$V_R' = -\frac{2v_1}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} .$$

numerisch: $V_R' \approx -720 \left(1 - 9 \cdot 10^{-14}\right)$ km/h.

c) Wie groß ist V_R für zwei Elektronenstrahlen, die mit $v = 0,6 \cdot c$ aufeinander zu fliegen?

Für die Elektronen ergäb sich eine Relativgeschwindigkeit

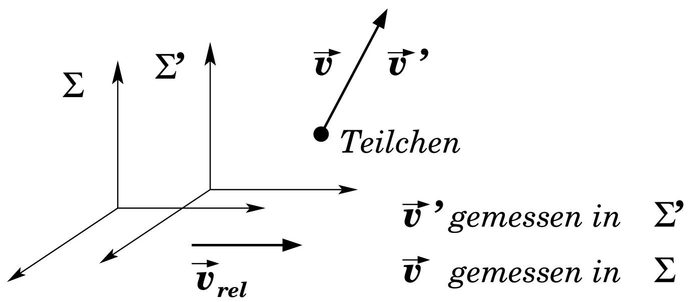
$$V_R' = -c \cdot \frac{15}{17},$$

dem Betrag nach natürlich kleiner als c, während für die Differenzgeschwindigkeit (im Laborsystem!) das Ergebnis $V_R' = 1,2 \cdot c$ lautet.
Bemerkung: Das letzte Ergebnis ist kein Widerspruch zum Relativitätsprinzip! Die Relativgeschwindigkeit der Züge, relativ zum Bahndamm, ist eine rein rechnerische Größe. Im Übrigen ist die Aussage, es gäbe keine Geschwindigkeit größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit, i.a. falsch
Beispiel: Ein Lichtstrahl werde an einem Drehspiegel reflektiert und treffe dann auf einen anderen Körper auf. Die Geschwindigkeit des Lichtpunktes auf diesem Körper kann dann in Abhängigkeit von seiner Entfernung vom Spiegel und von dessen Winkelgeschwindigkeit sehr wohl größer als c werden!

14.2 Vierergeschwindigkeit und Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Bestimmen Sie, wie sich die Komponenten der Vierergeschwindigkeit u^μ beim Übergang von einem Inertialsystem Σ zu einem anderen Inertialsystem Σ' transformieren, das sich gegenüber Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_r = v_r \cdot \vec{e}_x$ bewegt.
Weisen Sie damit nach, dass die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens in beiden Inertialsystemen über die Beziehungen

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{v_x - v_r}{1 - v_x v_r / c^2} \\ v_y' &= v_y \cdot \frac{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}{1 - v_x v_r / c^2} \\ v_z' &= v_z \cdot \frac{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}{1 - v_x v_r / c^2} \end{aligned}$$



Die Komponenten des kontravarianten Vektors der Vierergeschwindigkeit sind definiert als

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \,.$$

Dabei sind die dx^μ die Komponenten des kontravarianten Orts-Vierervektors:

$$dx^\mu \overset{!}{\rightarrow} \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{r} \end{pmatrix},$$

und $d\tau$ ist das Differential der Eigenzeit (Zeit, gemessen im Ruhsystem des sich bewegenden Teilchens). Unter Berücksichtigung der Zeitdilatation vergeht für den Beobachter im Inertialsystem, in dem sich das Teilchen bewegt, die Zeitspanne

$$dt = \gamma\,(v) \cdot d\tau \qquad\qquad \gamma\,(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Vierergeschwindigkeit im Bezugssystem Σ ist demnach

$$u^\mu \overset{!}{\rightarrow} \gamma\,(v) \left(\begin{array}{c} c \\ \vec{v} \end{array} \right).$$

Im dagegen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_r$ bewegten Bezugssystem Σ' ist

$$u^{'\mu} \overset{!}{\rightarrow} \gamma\,(v') \left(\begin{array}{c} c \\ \vec{v}' \end{array} \right).$$

Die Transformation der Komponenten des Vierervektors der Geschwindigkeit wird mit dem LORENTZ-Tensor L^μ_ν für die spezielle Relativbewegung der Inertialsysteme vorgenommen:

$$u'^\mu = L^\mu_\nu \cdot u^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_r & -\gamma_r\beta & 0 & 0 \\ -\gamma_r\beta & \gamma_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Zum Vergleich mit dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten muss auf die dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektoren umgerechnet werden. Zunächst ergeben sich vier Gleichungen für die Komponenen des Vierervektors der Geschwindigkeit im System Σ':

$$\begin{aligned}
u^{'0} &= \gamma' \cdot c = \gamma_r \cdot \gamma \cdot \left(c - \frac{v_r}{c} v_x\right) \\
u^{'1} &= \gamma' \cdot v'_x = \gamma_r \cdot \gamma \cdot (v_x - v_r) \\
u^{'2} &= \gamma' \cdot v'_y = \gamma \cdot v_y \\
u^{'3} &= \gamma' \cdot v'_z = \gamma \cdot v_z
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird nach dem relativistischen Faktor γ' aufgelöst und dieser dann in die übrigen Gleichungen eingesetzt. Damit ergeben sich die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten im Inertialsystem Σ':

$$\begin{aligned}
v'_x &= \frac{\gamma_r \cdot \gamma}{\gamma'} \cdot (v_x - v_r) = \frac{v_x - v_r}{1 - v_x \cdot v_r/c^2} \\
v'_y &= \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot v_y = v_y \cdot \frac{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}{1 - v_x \cdot v_r/c^2} \\
v'_z &= \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot v_z = v_z \cdot \frac{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}}{1 - v_x \cdot v_r/c^2}
\end{aligned}$$

Das sind natürlich die bekannten Gleichungen für das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten.
Bemerkung: Das Skalarprodukt von kovarianter und kontravarianter Vierergeschwindigkeit ist

$$u_\mu\, u^\mu = \gamma^2 \cdot \left(c^2 - v^2\right) = c^2,$$

ist also beim Übergang zu einem anderen Inertialsystem invariant. Differentiation nach der Eigenzeit ergibt daraus

$$u_\mu \frac{d}{d\tau} u^\mu \stackrel{!}{=} 0 :$$

kovariante Vierergeschwindigkeit und kontravariante Beschleunigung „stehen senkrecht aufeinander" !

14.3 Relativistische kinetische Energie

Zeigen Sie, dass die relativistische kinetische Energie auch in der Form

$$T_{\text{kin}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{m + m_0}$$

dargestellt werden kann. Welcher Zusammenhang folgt hieraus für ein Teilchen, das sich mit $v \ll c$ bewegt?
Mit der Definition für die kinetische Energie eines freien Teilchens $T_{\text{kin}} \equiv E - E_0$ ergibt sich aus der Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = p^2c^2 + E_0^2 \qquad \rightarrow \qquad p^2c^2 = (E - E_0)\,(E + E_0) = T_{\text{kin}}c^2 \cdot (m + m_0)$$

die gegebene Relation. Mittels TAYLOR-Entwicklung findet man für kleine Geschwindigkeiten

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

und damit den nicht-relativistischen Ausdruck

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_0^2\gamma^2v^2}{m_0\gamma + m_0} \approx \frac{m_0v^2}{2}.$$

Mit $T_{\text{kin}} = \frac{m_0}{2}v^2 \cdot f(\gamma), f(\gamma) \equiv 2\gamma^2/\gamma + 1 \approx 2\gamma$ sieht man, dass die relativistische kinetische Energie für große Geschwindigkeiten stärker als quadratisch anwächst.

14.4 Zerfallsprozess 1

Ein ruhendes π^+ -Meson (Ruhemasse $m_0^\pi = 273,13\ m_0^e$) zerfällt in ein Anti -Myon μ^+ (Ruhemasse $m_0^\mu = 206,77\ m_0^e$) und in ein Myon-Neutrino ν_μ (Ruhemasse $m_0^\nu = 0$). (Ruheenegie des Elektrons: $m_0^e \cdot c^2 = 0,511$ MeV)
Bestimmen Sie kinetische Energie, Impuls und Geschwindigkeit der Zerfallsprodukte.

Wie in der Vorlesung besprochen, geht man zur quantitativen, relativistischen Beschreibung von Stoßprozessen, Zerfallsvorgängen usw. von der Erhaltung des Viererimpulses aus. Weil $p^0 = \frac{E}{c}$ ist, enthält die Erhaltung des Viererimpulses neben der Erhaltung des gewöhnlichen dreidimensionalen Impulses auch den Energieerhaltungssatz. *ACHTUNG!* Im Unterschied zur nichtrelativistischen Physik gilt hier der Energieerhaltungssatz auch für unelastische Stöße, weil innere Anregungsenergien in der Ruhenergie m_0c^2 enthalten sind, die ja bei der nichtrelativistischen Behandlung nicht auftritt.

- Wir setzen den Viererimpuls vor und nach dem Zerfallsprozess gleich und werten komponentenweise aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{E_\pi}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{E_\nu}{c} \\ \vec{p}_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_\mu}{c} \\ \vec{p}_\mu \end{pmatrix}.$$

- Es folgt $\vec{p}_\nu = -\vec{p}_M$. Antineutrino und Myon fliegen demnach in entgegengesetzten Richtungen voneinander weg. Die Beträge der Impulse sind gleich: $|\vec{p}_N| = |\vec{p}_\mu| \equiv p$
- Die nullten Komponenten ergeben den Energieerhaltungssatz:

$$E_\pi = E_\nu + E_\mu \qquad m_0^\pi \cdot c^2 = E_\nu + E_\mu = |\vec{p}_\nu| c + c \cdot \sqrt{(m_0^\mu \cdot c)^2 + |\vec{p}_\mu|^2}$$
$$= E_\nu + E_\mu = p\,c + c \cdot \sqrt{(m_0^\mu\, c)^2 + p^2}$$

Quadrieren dieser Gleichung ergibt den Betrag des Impulses von Myon und Neutrino:

$$p = c \cdot \frac{m_0^{\pi\ 2} - m_0^{\mu\ 2}}{2 m_0^\pi} = \frac{29,7}{c}\mathrm{MeV}.$$

- Die kinetische Energie wird als Differenz von Gesamtenergie und Ruhenergie ermittelt: $E_{\mathrm{kin},\mu} = E_\mu - m_{0,\mu} \cdot c^2 = c \cdot \sqrt{(m_{0,\mu} \cdot c)^2 + p^2} - m_{0,\mu} \cdot c^2 = 4,1$ MeV. $E_{\mathrm{kin},\nu} = E_\nu = p \cdot c = 29,7\mathrm{MeV}$.
- Die Geschwindigkeiten bestimmt man, indem man den Zusammenhang von Impuls und Geschwindigkeit und die Gesamtenergie E nutzt:

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}, \qquad E = m_0 \gamma c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{\vec{p} \cdot c^2}{E}.$$

Damit erhält man für die Beträge der Geschwindigkeiten

$$v_\nu = c \qquad v_\mu = 0,27 \cdot c.$$

14.5 * Zerfallsprozess 2

Das neutrale π^0 - Meson zerfällt in zwei Photonen. Bei ruhenden Mesonen ist die Winkelverteilung $P(\cos\theta)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die Photonen unter dem Winkel θ zu beobachten, isotrop.
Es werde ein Strahl von π^0 - Mesonen betrachtet, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ = konst. bewegen und dabei zerfallen.
Berechnen Sie die Winkelverteilung $P(\cos\theta)$ der emittierten γ- Strahlen im Laborsystem(θ ist der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung der Mesonen und der Photonen).
Skizzieren und diskutieren Sie die Lösung für $v \to c$.
Zeigen Sie dazu zunächst unter Nutzung des Additionstheorems der Geschwindigkeitskomponenten (siehe Aufgabe 14.2), dass zwischen dem Winkel θ im Laborsystem und dem Winkel θ' im Ruhsystem der Mesonen die Beziehung

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - v/c}{1 - (v/c) \cdot \cos\theta}$$

besteht. Weiterhin gilt (weshalb?) für die Winkelverteilungen im Laborsystem und im Ruhsystem

$$P(\cos\theta) \cdot d(\cos\theta) = P(\cos\theta') \cdot d(\cos\theta').$$

Mit Σ werde das Laborsystem bezeichnet, mit Σ' das Ruhsystem der Pi- Mesonen. Die Richtung, in der sich die Pi-Mesonen relativ zum Laborsystem bewegen, sei die x - Achse; ihre Geschwindigkeit ist dann $\vec{V} = V \cdot \vec{e}_x$. Als nächstes führt man Kugelkoordinaten ein, wobei φ in der y-z-Ebene und θ von der x-Achse aus gemessen wird.. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten der Photonen im System Σ'

$$\begin{array}{rcl} v'_x &=& c\cos\theta' \\ v'_y &=& c\cos\varphi'\sin\theta' \\ v'_z &=& c\sin\varphi'\sin\theta' \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} \cos\theta' = \frac{v'_x}{c} \\ \tan\varphi' = \frac{v'_y}{v'_z}\,. \end{array} \ ,$$

und im Laborsystem gelten die entsprechenden Formeln mit den ungestrichenen Größen. In Σ' ist keine Raumrichtung ausgezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte bei einem Zerfall, ein Photon in Richtung θ' und φ' zu beobachten, ergibt sich damit zu

$$w(\varphi', \theta') = \frac{1}{2\pi} \,.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist hier auf einen Halbraum normiert, da bei einem Zerfall zwei Photonen in entgegengesetzt Richtung entstehen. Die Wahrscheinlichkeit dW Photonen im Raumwinkelbereich $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$ zu messen ist deshalb

$$dW(\varphi', \theta') = \frac{\sin\theta'}{2\pi} d\theta' d\varphi' \,.$$

Integriert man über den WInkel φ' ab, ergibt sich

$$dW(\theta') = \sin\theta' d\theta' = -d\,\cos\theta' =: -P(\cos\theta')\, d\cos\theta' \,,$$

was als Definitionsgleichung der Winkelverteilungsfunktion $P(\cos\theta')$ aufgefaßt werden kann. Da der Betrag der Geschwindigkeit der Photonen die Lichtgeschwindigkeit ist, ist dieser unabhängig vom gewählten Inertialsystem. Es gilt also nur noch die Winkel in Σ zu finden. Dazu benutzen wir die die Additionstheoreme für die Geschwindigkeit. Da sich die y- und z-Komponente in gleicher Weise transformieren (vergleiche Aufgabe 14.2), sieht man sofort, daß $\varphi = \varphi'$ gilt, da sich der relativistische Faktor herauskürzt. Die Isotropie in der y-z-Ebene, d.h. in der Ebene senkrecht zu Bewegungsrichtung der Mesonen, bleibt also erhalten, so daß die Integration der Wahrscheinlichkeit über φ ebenfalls lediglich einen Faktor 2π liefert. Anders ist das jedoch mit der x-Richtung. Dort gilt wegen

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V \cdot v_x}{c^2}}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta} \,.$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $dW(\theta)$ dafür, daß ein Photon im Laborsystem in θ-Richtung gemessen wird, zu

$$\begin{aligned} -P(\cos\theta')d\cos\theta') &= -d\,\cos\theta' \\ &= -d\left(\frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\right) \quad \text{mit} \quad \beta \equiv V/c\,. =: -P(\cos\theta)d\cos\theta) \end{aligned}$$

Durch Differenzieren findet man

$$\frac{d\,\cos\theta'}{d\,\cos\theta} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2},$$

und damit den Zusammenhang zwischen den Winkelverteilungen im Ruhsystem und im Laborsystem:

$$P\left(\cos\theta\right) = P\left(\cos\theta'\right)\, \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\,\cos\theta)^2}.$$

Diskussion: Die Verteilung im Laborsystem hängt nur von der Geschwindigkeit der Mesonen und dem Winkel θ ab.

- Da im Winkelbereich $0 \le \theta \le \pi$ Kosinusfunktion monoton fällt, ist auch die Winkelverteilung in diesem Bereich monoton fallend.

- Geschwindigkeit der Mesonen ist groß:

$$\lim_{\beta \to 1} P(\cos\theta) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad \theta = 0 \\ 0 & \text{für} \quad \theta \neq 0 \end{cases} .$$

  Aus dem letzten Ergebnis liest man ab: Mit wachsender Geschwindigkeit der zerfallenden Mesonen werden die emittierten Photonen in Vorwärtsrichtung beobachtet; eine „Rückwärtsstreuung“ findet praktisch nicht statt.

Bemerkung 1: Das Produkt $P(\cos\theta) \cdot d(\cos\theta)$ beschreibt dieWahrscheinlichkeit für die Emission der Photonen.
Die angegebene Beziehung

$$P(\cos\theta) \cdot d(\cos\theta) = P(\cos\theta') \cdot d(\cos\theta')$$

bedeutet deshalb, dass diese Wahrscheinlichkeit im Ruhsystem der Mesonen gleich groß ist wie im Laborsystem, dass also die Bewegung der Mesonen auf ihren Zerfall keinen Einfluss hat.
Bemerkung 2: Der Pionenzerfall wurde 1964 von einer Arbeitsgruppe am genutzt, um das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten experimentell zu beweisen.: Die Geschwindigkeit der γ - Quanten blieb unabhängig von der Geschwindigkeit der zerfallenden Pionen ($\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 45$ gleich der Vakuumlichtgeschwindigeit!
(T. Alväger, F.J.M. Farley, J. Kjellman, L. Wallin , physics letters, 12, 260, [1964]).
Bemerkung 3: Ähnliche Überlegungen wie oben zum Additionstheorem der Geschwindigkeiten sind die Grundlage u.a.für das Verständnis des relativistischen DOPPLER-Effektes (siehe spätere Vorlesung :“Theoretische Elektrodynamik“, Transformation der Felder).