Beispiele:

1) $f(x) = \tan x - x$
$g(x) = x - \sin x$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

$g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ bei $x \neq 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

f, g diff-bar auf $(0,\varepsilon)$ und $(-\varepsilon, 0)$ bei kleinem $\varepsilon > 0$

(1. und 2. Bedingung von Satz 1 erfüllt)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2$$

(3. Bedingung von Satz 1 mit $A = 2$ erfüllt)

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2 .$$

2) Man vergleiche die Wachstumsgeschwindigkeiten bei $t \to +\infty$ der 3 Funktionenklassen auf $\mathbb{R}^1$

$$f(t) = a^t \quad (a>1) \qquad g(t) = t^\mu \quad (\mu > 0) \qquad h(t) = (\ln t)^\nu \quad (\nu > 0)$$

Dazu Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{a^t}{t^\mu}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^\mu}{(\ln t)^\nu}$ vom Typ $\boxed{\frac{+\infty}{+\infty}}$ betrachten.

(i) $\mu = n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a^t}{t^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ergänzung 3}}}{=} \lim \frac{a^t \cdot \ln a}{n \cdot t^{n-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}}}{=} \lim \frac{a^t (\ln a)^2}{n(n-1)\, t^{n-2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}}}{=} \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{n\text{-mal} \\ \text{Ergänzung 3}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a^t (\ln a)^n}{n!} = +\infty$$

($\exists$ und ist $+\infty$)

(ii) μ bel. reell > 0 $\rightsquigarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > \mu \rightsquigarrow t^n > t^\mu$ (bei großen t),

somit $\frac{a^t}{t^n} < \frac{a^t}{t^\mu} \rightsquigarrow \lim\limits_{t\to\infty} \frac{a^t}{t^\mu} = +\infty$.

Also $\frac{a^t}{t^\mu} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, d.h.

Die Exponentialfunktion strebt schneller zu $+\infty$ als jede beliebige Potenz von t.

(iii) $\nu = n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\mu}{(\ln t)^n} \underset{\text{„Satz 1"}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\mu \cdot t^{\mu-1}}{n(\ln t)^{n-1}\cdot\frac{1}{t}} = \lim \frac{\mu\, t^\mu}{n(\ln t)^{n-1}} \underbrace{= \cdots\cdots =}_{\substack{n\text{-mal} \\ \text{„Satz 1"}}} \lim_{t\to\infty} \frac{\mu^n t^\mu}{n!} = +\infty$$

(iv) ν bel. reell $> 0 \rightsquigarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > \nu$

$$\frac{t^\mu}{(\ln t)^n} < \frac{t^\mu}{(\ln t)^\nu} \rightsquigarrow \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\mu}{(\ln t)^n}}_{\substack{=+\infty \\ (iii)}} \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\mu}{(\ln t)^\nu} = +\infty .$$

Also $\dfrac{t^\mu}{(\ln t)^\nu} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, d.h.

$\boxed{\text{Jede Potenz von } t \text{ strebt schneller zu } +\infty \text{ als jede beliebige Potenz von } \ln t.}$

Wegen $\dfrac{a^t}{(\ln t)^\nu} = \underbrace{\dfrac{a^t}{t}}_{\substack{(ii)\downarrow \\ +\infty}} \cdot \underbrace{\dfrac{t}{(\ln t)^\nu}}_{\substack{(iv)\downarrow \\ +\infty}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, d.h.

$\boxed{\text{Die Exponentialfunktion strebt schneller zu } +\infty \text{ als jede beliebige Potenz von } \ln t.}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$ $\underset{\text{Satz 1}}{\rightsquigarrow}$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x} = \underline{-\frac{3}{4}} = \lim \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

Lösbar aber auch durch Umformung:

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-5}{x+2} \xrightarrow[x\to 2]{} \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} .$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{1^\infty}$ $\quad y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \ln y = \frac{1}{x^2}\cdot \ln\cos x$ $\boxed{+\infty\cdot 0}$

Trick:

Da $y = e^x$ stetig, so gilt die Implikation

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \begin{cases} k \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y = \begin{cases} e^k \\ +\infty \\ 0 \end{cases} \quad \left(y = e^{\ln y}\right).$$

Also $\displaystyle \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} \underset{\text{Satz 1}}{=} \lim \frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = -\frac{1}{2}.$

Folglich $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$