Beispiele

$f(x) = \sin^3 x + \cos x^3$ genügend oft diff-bar, periodisch $\circ [0, 2\pi)$.

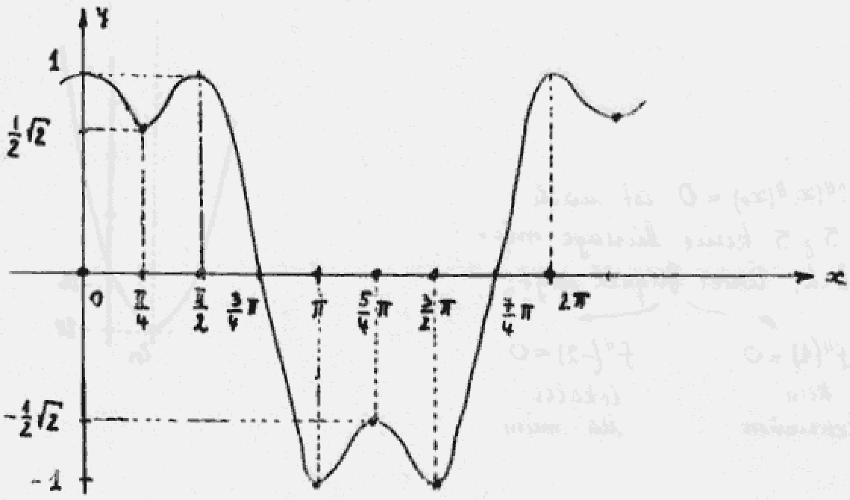
$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 x \cdot \sin x = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) =$
$= \frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x)$

$f''(x) = 3\cos 2x (\sin x - \cos x) + \frac{3}{2} \sin 2x (\cos x + \sin x)$

Stationäre Punkte:

$f'(x) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0,\ x_3 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{4},\ x_4 = \pi,\ x_6 = \frac{3}{2}\pi,\ x_5 = \frac{5}{4}\pi.$

stat. Punkte	Vorzeichen $f''(x_i)$	lokales Extremum	Funktionswert $f(x_i)$
x_1	$-$	max	1
x_2	$+$	min	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
x_3	$-$	max	1
x_4	$+$	min	-1
x_5	$-$	max	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
x_6	$+$	min	-1



$$f(x) = (x-1)^3(x+2)^4$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^4 + 4(x+2)^3(x-1)^3 = (x-1)^2(x+2)^3(7x+2)$$

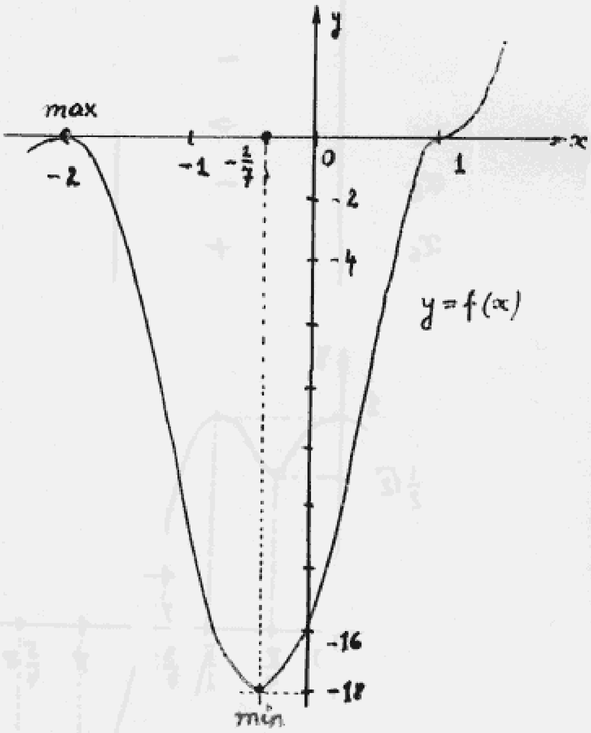
Stationäre Punkte:

$$f'(x)=0 \rightsquigarrow x_1 = -2 \qquad x_2 = -\frac{2}{7} \qquad x_3 = 1 \,.$$

Vorzeichen von f':

Intervalle	$(x-1)^2$	$(x+2)^3$	$7x+2$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -2)$	+	−	−	+	
$(-2, -\frac{2}{7})$	+	+	−	−	$+ \rightsquigarrow -$ max
$(-\frac{2}{7}, 1)$	+	+	+	+	$- \to +$ min
$(1, +\infty)$	+	+	+	+	kein Extremum

x	-2	$-\frac{2}{7}$	0	1
$f(x)$	0	≈ -18	-16	0



Bei $f''(x_0)=0$ ist nach Satz 5 keine Aussage möglich. Unser Beispiel zeigt:

$f''(1)=0$ kein Extremum

$f''(-2)=0$ lokales Maximum