$(*)$ $\boxed{p(x) = (x - x_0)\, q(x) + p(x_0)}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{bekannt} x^k \qquad\qquad q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{b_k}_{unbekannt} x^k$$

$(*)$: Gleichheit zweier Polynome $\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{llll}
x_n & : a_n = b_{n-1} & \qquad b_{n-1} & = a_n \\
x^{n-1} & : a_{n-1} = b_{n-1} - x_0 b_{n-1} & \qquad b_{n-2} & = a_{n-1} + x_0 b_{n-1} \\
\vdots & & \qquad \vdots & \\
x^1 & : a_1 = b_0 - x_0 b_1 & \qquad b_0 & = a_1 + x_0 b_1 \\
x^0 & : a_0 = p(x_o) - x_0 b_0 & \qquad p(x_0) & = a_0 + x_0 b_0
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ HORNER-Schema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
		$+x_0 b_{n-1}$	$+x_0 b_{n-2}$	$\cdots$	$+x_0 b_2$	$+x_0 b_1$	$+x_0 b_0$
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	$p(x_0)$

<u>Beispiele:</u>

1) Darstellung $(*)$ ist gesucht für $p(x) = 4x^4 - 7x^2 + 3x + 2$ mit $x_0 = -2$

	4	0	-7	3	2	$\leftarrow$ alle Koeffizienten von $p(x)$
		-8	16	-18	30	
-2	4	-8	9	-15	32	$\leftarrow$ Koeffizienten von $q(x)$
	b_3	b_2	b_1	b_0	$p(-2)$	

$(*)$: $p(x) = (x+2)\underbrace{\left(4x^3 - 8x^2 + 9x - 15\right)}_{q(x) = q_1(x)} + 32$

Weiter: „Abspalten“ des Faktors $(x - x_0)$ vom Polynom $q_1(x)$ gemäß $(*)$, d.h.

$$q_1(x) = (x - x_0)\, q_2(x) + q_1(x_0)$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - x_0)\left[(x - x_0) q_2(x) + q_1(x_0)\right] + p(x_0) \\
&= (x - x_0)^2 q_2(x) + (x - x_0) q_1(x_0) + p(x_0) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

usw.

Für diese Schritte kann man das bereits vorhandene HORNER-Schema weiterführen.

	4		-7		2
-2		-8	16	-18	30
	4	-8	9	-15	$\underline{\underline{32}} = p(-2)$
-2		-8	32	-82	
	4	-16	41	$\underline{\underline{-97}} = q_1(-2)$	
-2		-8	48		
	4	-24	$\underline{\underline{89}} = q_2(-2)$		
-2		-8			
	4	$\underline{\underline{-32}} = q_3(-2)$			

$q_1(x) = 4x^3 - 8x^2 + 9x - 15$

$q_2(x) = 4x^2 - 16x + 41$

$q_3(x) = 4x - 24$

$q_4(x) = 4$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = (x - x_0)[(x - x_0)\underbrace{q_2(x)}_{(x - x_0)q_3(x) + q_2(x_0)} + q_1(x_0)] + p(x_0)$$

$$= (x - x_0)\{(x - x_0)[(x - x_0)\underbrace{q_3(x)}_{(x - x_0)q_4(x) + q_3(x_0)} + q_2(x_0)] + q_1(x_0)\} + p(x_0)$$

$$= \quad \ldots$$

In unserem Fall:
$p(x) = 4(x + 2)^4 - 32(x + 2)^3 + 89(x + 2)^2 - 97(x + 2) + 32$
(Vollständiges HORNER-Schema)

2) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$
Ist $x_0 = 1$ eine Wurzel? Wenn „ja“, welche Vielfachheit?

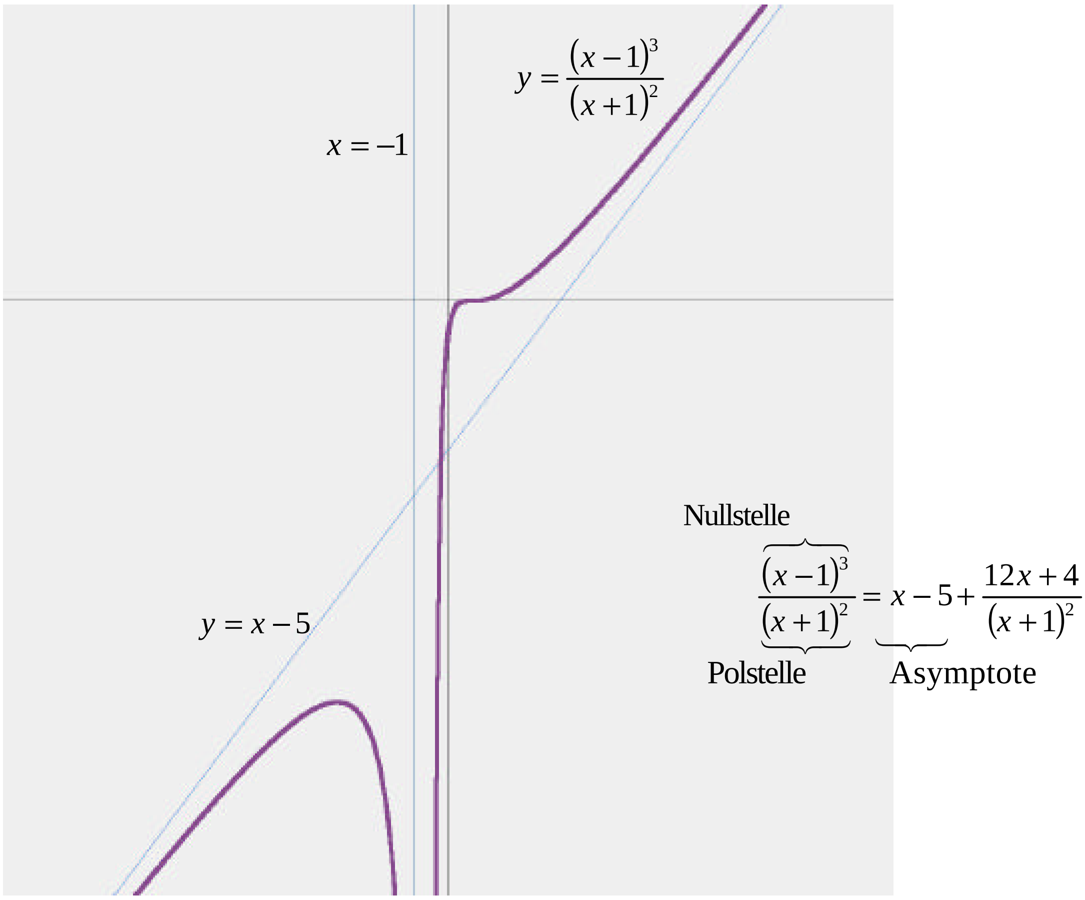
	2	-1	-4	3
		2	1	-3
$x_0 = 1$	2	1	-3	$0 = p(1)$
		2	3	
1	2	3	$0 = q_1(1)$	
		2		
1	2	$\underline{\underline{5}}$		

$p(x) = (x - 1)\underbrace{(2x^2 + x - 3)}_{q_1(x)}$

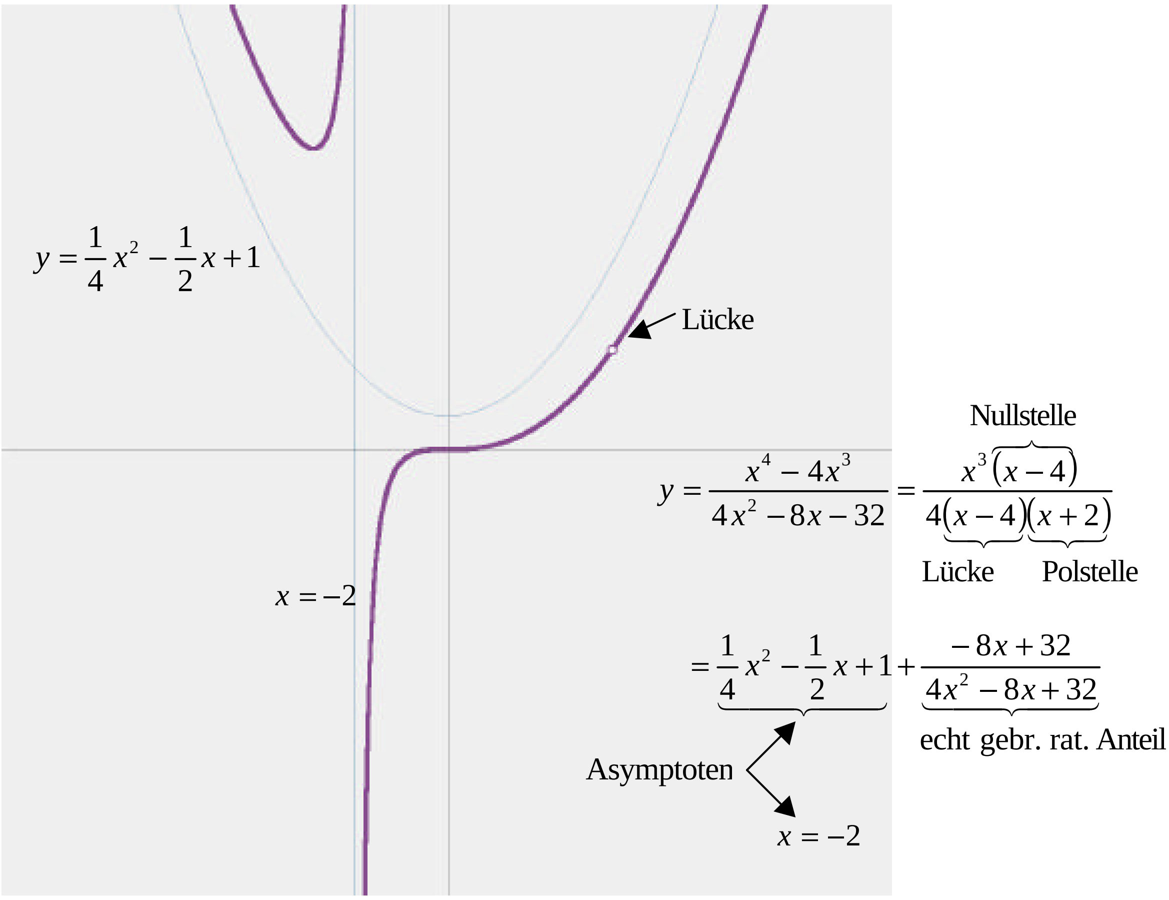
$q_1(x) = (x - 1)\underbrace{(2x + 3)}_{q_2(x)}$

$x_0 = 1$ ist 2-fache Wurzel.

$(*)$: $p(x) = 2(x - 1)^3 + 5(x - 1)^2$ (da $p(x) = (x - 1)\{(x - 1)[(x - 1) \cdot 2 + 5]\}$)



$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
$x=-1$
$y=x-5$
Nullstelle
$\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=x-5+\frac{12x+4}{(x+1)^2}$
Polstelle
Asymptote



$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$
Lücke
Nullstelle
$y=\frac{x^4-4x^3}{4x^2-8x-32}=\frac{x^3(x-4)}{4(x-4)(x+2)}$
Lücke
Polstelle
$x=-2$
$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1+\frac{-8x+32}{4x^2-8x+32}$
echt gebr. rat. Anteil
Asymptoten
$x=-2$