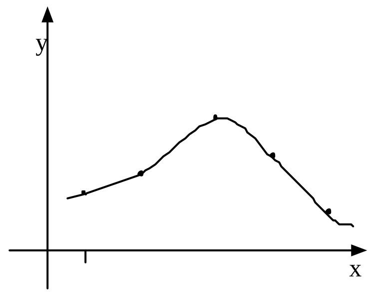
(3) Interpolation

- **Problem**: Gegeben sei eine Tabelle von 2-mal n reellen Zahlen (etwa Messwerte).

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n



Wir vermuten hinter diesen Messergebnissen einen funktionellen Zusammenhang zwischen den x_i und den y_i, also eine Funktion $y = f(x)$. Diese soll möglichst gut durch eine Formel erfasst werden.

$$\text{tabellarisch} \xrightarrow[\text{Interpolation}]{} \text{analytisch}$$

- **Einfachste Idee**:

Gesucht ist ein (möglichst kleines) Polynom höchstens $n-1$-ten Grades, das in den Knoten $x_1, \cdots, x_n$ mit den Werten $y_1, \cdots, y_n$ übereinstimmt.

Hat man ein solches Polynom $P(x)$ mit $\deg P \leq n-1$ und $P(x_i) = y_i$ ($i = 1, \cdots, n$) gefunden, dann setzt man auf einem gewissen Intervall $[a,b]$, das die Punkte $x_1, \cdots, x_n$ enthält,

$$\boxed{\underbrace{f(x)}_{\text{unbekannt}} \approx \underbrace{P(x)}_{\text{bekannt}}} \quad \text{Interpolationsformel}$$

- **Fragen**

Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms $P(x)$
(trifft zu, wird durch Mathematiker bewiesen)
„Satz“
Das Problem besitzt eindeutige Lösung in der Menge der Polynome von höchstens $n-1$-tem Grade, d.h.
$\exists!$ Polynom $P(x)$:
$\deg P \leq n-1$
$P(x_i) = y_i$
$i = 1, \cdots, n$

Berechnung von $P(x)$

verschiedene Methoden

- NEWTONsches Interpolations-polynom $N(x)$
- LAGRANGEsches Interpolations-polynom $L(x)$

Abschätzung
$f(x) - P(x)$
(schwierig)

Weitere analytische Behandlung der uns bekannten Funktion $f(x)$ mittels $P(x)$, etwa min/max Verhalten bei $x \to \infty$.

- <u>Ansätze</u>:

NEWTONsches Interpolationspolynom $N(x)$

$$N(x)=c_0+c_1(x-x_1)+c_2(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+c_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

Berechnung der Koeffizienten aus den Bedingungen $N(x_i)=y_i \quad (i=1,\cdots,n)$

LAGRANGEsches Interpolationspolynom $L(x)$

Für jeden <u>Knoten</u> x_i $(i=1,\cdots,n)$ betrachtet man zunächst das <u>Einflusspolynom</u> des i-ten Knotens $l_i(x)=\dfrac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

dann gelten $\deg(l_i)=n-1$

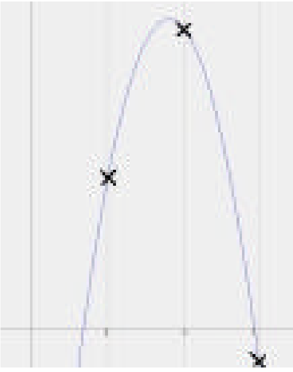
$$\begin{array}{lcll} l_1(x_1)=1 & \text{und} & l_1(x_i)=0 & i\neq 1 \\ l_2(x_2)=1 & \text{und} & l_2(x_i)=0 & i\neq 2 \\ \vdots & & \vdots & \\ l_i(x_i)=1 & \text{und} & l_i(x_k)=0 & i\neq k \\ \vdots & & \vdots & \\ l_n(x_n)=1 & \text{und} & l_n(x_i)=0 & i\neq n \end{array}$$

Jetzt setzt man $\underbrace{L(x)}=\sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x)$

Polynom $n-1$-ten Grades, und es gilt $L(x_i)=y_i$.

- <u>Beispiel</u>:

1	2	3
2	4	$-\frac{1}{2}$



? Interpolationspolynom $\deg\leq 2$ selbst berechnen!

$$N(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)(x-2)$$

$x_1=1 \quad y_1=2=N(1)=c_0 \qquad c_0=2$

$x_2=2 \quad y_2=4=N(2)=c_0+c_1(2-1) \qquad c_1=2$

$x_3=3 \quad y_3=-\frac{1}{2}=N(3)=c_0+c_1(3-1)+c_2(3-1)(3-2)$

$-\frac{1}{2}=2+2\cdot 2+c_2\cdot 2\cdot 1 \quad\rightarrow\quad c_2=-\frac{13}{4}$

$$N(x)=2+2(x-1)-\tfrac{13}{4}(x-1)(x-2)=\underline{\underline{-\tfrac{13}{4}x^2+\tfrac{47}{4}x-\tfrac{13}{2}}}$$

$L(x)$: Einflusspolynome: $l_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{1 \cdot (-1)} = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) = 2 l_1(x) + 4 l_2(x) - \tfrac{1}{2} l_3(x) = -\tfrac{13}{4} x^2 + \tfrac{47}{4} x - \tfrac{13}{2}$$

- Bemerkungen:

1.) Stückweise lineare Interpolation zwischen den einzelnen Knoten wäre ebenfalls denkbar.
Nachteil: für jedes Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ andere Formel

2.) Hat man das Interpolationspolynom, dann kann $f(x)$ auch für Zwischenwerte $x \neq x_i$ näherungsweise durch das Polynom $P(x)$ interpoliert, d.h. etwa nach HORNERschem Schema berechnet werden.

3.) Wird die Messtabelle im Nachhinein um einen Wert erweitert,

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	x_{n+1}
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	y_{n+1}

dann muss man nicht alle Koeffizienten des neuen Interpolationspolynoms $P_n(x)$ neu berechnen. Man kann das bereits berechnete Polynom $P_{n-1}(x)$ in beiden Methoden verwenden.

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + c_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + \frac{y_{n+1} - L_{n-1}(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)} \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

- Übungsaufgabe:

Im betrachteten Beispiel wird noch $x_4 = 5 \quad y_4 = 1$ ergänzt. Man berechne das Interpolationspolynom vom Grade 3.