Taylor - Formeln

$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$\boxed{e^x = \underbrace{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n}_{T_{0,n}^{e^x}(x)} + \underbrace{\frac{e^{\xi_L}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{0,n}^f(x)\text{ in der Lagrange-Form}}}$$

$0 \lessgtr \xi_L \lessgtr x \quad \begin{matrix}(x>0)\\(x<0)\end{matrix}$

$$|R_{0,n}^f(x)| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ x \text{ fixiert}}]{} 0$$

Für $\forall x \in \mathbb{R}$ kann $f(x) = e^x$ beliebig genau durch Polynome $T_{0,n}^f$ approximiert werden.

$$f(1) = e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{7!} = 2{,}7183.$$

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + R_{0,2k}^f(x)}$$

Lagrange-Form von $R_{0,2k}^f(x) = (-1)^k \frac{\cos \xi_L}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

$$|R_{0,2k}^{\sin}(x)| \le \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ x \text{ fixiert}}]{} 0$$

$\leadsto$ „gute" Approximation von $\sin x$ durch die Taylorpolynome.

$k=1: \quad T_1(x) = x \qquad \sin x \approx x$

Genauigkeit $0{,}1\%$, d.h. $|R_2(x)| \le \frac{|x|^3}{6} \le 0{,}001$,

wird erreicht bei $|x| \le \sqrt[3]{0{,}006} = 0{,}1817 \quad (\measuredangle \approx 10{,}4°)$

$0{,}01\%$ bei $|x| \le 0{,}084 \quad (\measuredangle \approx 4{,}8°)$

$k=2 \quad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$

$0{,}1\%$ bei $|x| \le 0{,}6544 \quad (\measuredangle \approx 37{,}5°)$

$0{,}01\%$ bei $|x| \le 0{,}4129 \quad (\measuredangle \approx 23{,}6°)$

$k = 3 \qquad T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Genauigkeit 0,1 % $\quad |R_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{5040} \quad |x| \leq 1{,}26 \quad (\measuredangle \approx 72{,}2°)$

0,01 % $\quad |x| \leq 0{,}907 \quad (\measuredangle \approx 52°)$

$f(x) = \ln x$ hat keine Taylor-Formel für $x_0 = 0$.

Daher $\circ$ $f(x) = \ln(1+x) \qquad x_0 = 0$

$D_f = (-1, +\infty) \qquad f(0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R^f_{0,n}(x)}$$

Lagrange-Form

$R^f_{0,n}(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi_L)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ergibt bei $0 \leq x \leq 1 \quad |R^f_{0,n}(x)| < \frac{1}{n+1}$

Cauchy-Form

$R^f_{0,n}(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi_C)^{n+1}} \cdot x \cdot (x - \xi_C)^n$ ergibt bei $-1 < x < 0 \quad |R^f_{0,n}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-\theta|x|}$

mit $0 < \theta < 1$

In beiden Fällen gilt $|R^f_{0,n}(x)| \xrightarrow[x \text{ fixiert}]{n \to \infty} 0$, wobei $\underline{x \in (-1, 1]}$ gilt.