Beispiele zur Integration gebrochen-rationaler Funktionen

1.) $J(x) = \int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx}$ =

$(x \neq 1)$ (Satz 2)

$\downarrow$

$\ln|x-1|$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}}\cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

2.) $J(x) = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3} =$

(Satz 2)

$(x \neq 0,\ x \neq 1)$

$\downarrow$ $\ln|x|$ $\quad\downarrow$ $\ln|x-1|$ $\quad\downarrow$ $-\frac{1}{x-1}$ $\quad\downarrow$ $-\frac{1}{(x-1)^2}$

$$= \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C\,.$$

3.) $J(x) = \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \int\frac{A}{x+a}\,dx + \int\frac{B}{x-a}\,dx =$

$(a \neq 0)$

12. Grundintegral

Koeffizientenvergleich:

$1 = A(x-a) + B(x+a)$

$\rightsquigarrow$ $0 = A + B$ $\qquad A = -\frac{1}{2a}$

$\frac{1}{a} = -A + B$ $\qquad B = \frac{1}{2a}$

$$= -\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,.$$

IV.

$$J(x) = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx + \frac{AA_1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}}_{J_m = J_m(x)} \qquad A_1 = \frac{2B}{A} - p$$

$(A \neq 0,\ m > 1,\ \frac{p^2}{4} - q < 0)$

d.h. $q - \frac{p^2}{4} = a^2$

$$\int \frac{dz}{z^m}$$

2. Grundintegral

J_m:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \text{(11. Grundintegral)}$$

$$J_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \ldots \qquad \ldots = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + \underbrace{\int \frac{2mx^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}\,dx}$$

$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^m}$ $\qquad du = \frac{-2mx}{(x^2+a^2)^{m+1}}$

$dv = dx$ $\qquad v = x$

$$= 2m\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}\,dx$$

$$= 2m\,J_m - 2ma^2 J_{m+1}$$

$$\rightsquigarrow\ J_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\,J_m - 2m\,a^2 J_{m+1}$$

$$\rightsquigarrow\ J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2}\,J_m$$

Rekursionsformel mit bekanntem J_1.

Damit setzt sich $J(x)$ aus $\int \frac{dz}{z^m}$ und J_m zusammen und kann somit ebenfalls berechnet werden.

Faktisch haben wir durch unsere Betrachtungen die folgende Tatsache bewiesen:

<u>Satz</u>. Das unbestimmte Integral jeder gebrochen-rationalen Funktion kann durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.