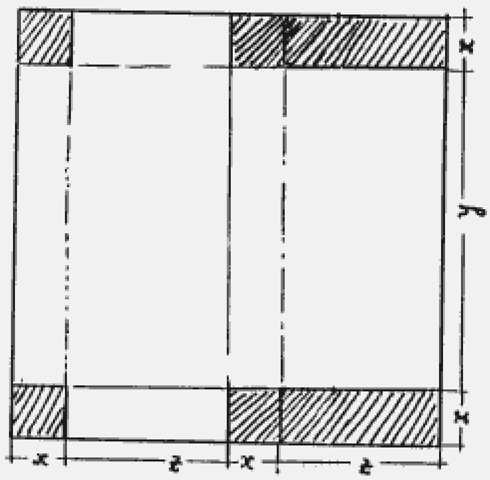
# Beispiele

1.) Nochmal die Aufgabe mit dem Rechteck.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 20)$$

$$(**)' \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 20 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x = y = (-\lambda) \\ 2x = 20 \\ \underline{\underline{x = y = 10}}. \end{array}$$

2.) Aus einer Blechtafel von 1m × 1m soll ein Kasten mit maximalem Volumen hergestellt werden, wobei der Zuschnitt folgende Form haben soll:




$$V(x, y, z) = xyz$$

$$g_1(x, y, z) = 2x + y - 1$$

$$g_2(x, y, z) = 2x + 2z - 1$$

2 Nebenbedingungen

↓

2 Lagrange-Multiplikatoren

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = V(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

$$(**)' \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = V'_x + \lambda_1 g'_{1x} + \lambda_2 g'_{2x} = yz + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = V'_y + \lambda_1 g'_{1y} + \lambda_2 g'_{2y} = xz + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = V'_z + \lambda_1 g'_{1z} + \lambda_2 g'_{2z} = xy + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g_1 = 2x + y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = g_2 = 2x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Lösung des Systems $(**)'$:

aus 1. 2. 3. Gleichung $\rightsquigarrow$ $yz - 2xz - xy = 0$

4. —"— $\quad y = 2\left(\frac{1}{2} - x\right)$

5. —"— $\quad z = \frac{1}{2} - x$

einsetzen

$$\rightsquigarrow \; 2\left(\tfrac{1}{2}-x\right)\left(\tfrac{1}{2}-x\right) - 2x\left(\tfrac{1}{2}-x\right) - 2x\left(\tfrac{1}{2}-x\right) = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-x\right)\left(\tfrac{1}{2}-3x\right) = 0 \;\rightsquigarrow\; \begin{array}{ll} x_1 = \frac{1}{2} & x_2 = \frac{1}{6} \\ y_1 = 0 & y_2 = \frac{2}{3} \\ z_1 = 0 & z_2 = \frac{1}{3} \\ \hline V = 0 & V = \frac{1}{27} \end{array}$$

max.

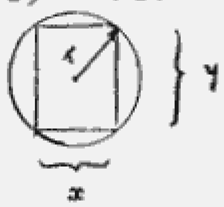
4.) Tragfähigkeit eines Balkens

(wurde bereits in ⑥ als Extremwertaufgabe für Funktionen einer Variablen gelöst!)

Jetzt: Lösen als Extremwertproblem mit Nebenbedingung!

$\alpha(x,y) = k\,x\,y^2 \qquad g(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - r^2 = 0$

(Tragfähigkeit)




$$F(x,y,\lambda) = kxy^2 + \lambda\left(\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{2}\right)^2 - r^2\right)$$

$$(**)' \left\{ \begin{array}{ll} ky^2 + \lambda \frac{x}{2} = 0 & | \cdot y \\ 2kxy + \lambda \frac{y}{2} = 0 & | \cdot (-x) \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - r^2 = 0 & \end{array} \right. \rightsquigarrow \; ky^3 - 2kx^2y = 0$$

$$y(y^2 - 2x^2) = 0$$

$y = 0$ uninteressant $\qquad y^2 = 2x^2$

$\downarrow$ 3. Gleichung

$$x^2 + 2x^2 = 4r^2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\,r \qquad y = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$$