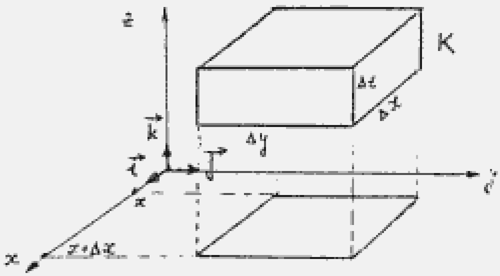
# VI § 19 Die Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit

In einem räumlichen Gebiet befinde sich eine Flüssigkeit. Uns interessiert die folgenden Situation: In diesem Gebiet betrachten wir einen von der Flüssigkeit umströmten ("kleinen") Quader $K$.




**Voraussetzungen und Annahmen:**

- In $K$ liegen weder Quellen noch Senken (d. h. es gibt in $K$ keine Punkte, in denen Flüssigkeit entsteht oder verschwindet).
- Die Flüssigkeit ist *kompressible*, d. h. die Flüssigkeitsdichte $\varrho$ hängt sowohl vom Ort als auch von der Zeit ab, also $\varrho = \varrho(x, y, z, t)$.
- Volumen von $K$: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.
- Geschwindigkeitsvektor der Strömung: $\vec{v} = v_1 \vec{\mathrm{i}} + v_2 \vec{\mathrm{j}} + v_3 \vec{\mathrm{k}}$ mit den stetigen Koordinatenfunktionen $v_i = v_i(x, y, z)$ $i = 1, 2, 3$.

Der ***Fluss*** durch den Rand von $K$ ist gleich dem totalen Massenverlust pro Zeiteinheit.
Damit ist die Frage: Wieviel Flüssigkeitsmasse verläßt $K$ in einer Zeiteinheit?

Wir betrachten die $x$-Richtung.
Die Masse an Flüssigkeit, die $K$ durch die vordere Fläche in der Zeit $\Delta t$ verläßt, ergibt sich zu

$$\varrho \cdot v_1(x + \Delta x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t, \qquad \left[\frac{g}{cm^3} \cdot \frac{cm}{sec} \cdot cm \cdot cm \cdot sec\right] = [g],$$

die Funktionen $v_2$ und $v_3$ leisten in dieser Richtung keinen Beitrag.
Die Masse an Flüssigkeit, die in $K$ durch die hindere Wandfläche in der Zeit $\Delta t$ hineingelangt, ergibt sich zu

$$\varrho \cdot v_1(x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t.$$

Demzufolge ist der Massenverlust in Richtung $\overrightarrow{\mathbf{i}}$ gleich

$$\big(\varrho(x+\Delta x,y,z,t)\cdot v_1(x+\Delta x)-\varrho(x,y,z,t)\cdot v_1(x)\big)\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\Delta t=$$
$$\big(\varrho(x+\Delta x,y,z,t)\cdot v_1(x+\Delta x)-\varrho(x,y,z,t)\cdot v_1(x)\big)\frac{1}{\Delta x}\cdot\Delta V\cdot\Delta t\ =$$
$$\frac{\Delta(\varrho\cdot v_1)}{\Delta x}\cdot\Delta V\cdot\Delta t.$$

Für die beiden anderen Paare paralleler Seiten von $K$ erhält man analoge Ausdrücke.
Somit ergibt sich als Fluss durch den **gesamten Rand** von $K$ die folgende Summe

$$\left(\frac{\Delta\varrho\cdot v_1}{\Delta x}+\frac{\Delta\varrho\cdot v_2}{\Delta y}+\frac{\Delta\varrho\cdot v_3}{\Delta z}\right)\cdot\Delta V\cdot\Delta t$$

Andererseits ist dieser Massenverlust während $\Delta t$ in $K$ gleich

$$-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\Delta V\cdot\Delta t$$

mit der zeitlichen Änderungsrate der Dichte. Hier haben wir den partiellen Zuwachs bei Existenz der partiellen Ableitung verwendet

$$\varrho(x,y,z,t+\Delta t)-\varrho(x,y,z,t)=\frac{\partial\varrho}{\partial t}(x,y,z,t)\cdot\Delta t.$$

Es gilt also

$$\left(\frac{\Delta\varrho\cdot v_1}{\Delta x}+\frac{\Delta\varrho\cdot v_2}{\Delta y}+\frac{\Delta\varrho\cdot v_3}{\Delta z}\right)\cdot\Delta V\cdot\Delta t=-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\Delta V\cdot\Delta t.$$

Wenn nun $\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t$ alle gegen Null streben (aus mathematischen Gründen setzt man nun die Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktionen voraus, um den fogenden Schritt begründen zu können), dann erhält man

$$\operatorname{div}(\varrho\cdot\overrightarrow{v})=-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\quad\text{oder}\quad\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}(\varrho\cdot\overrightarrow{v})=0.$$

Diese Gleichung ist die **Kontinitätsgleichung** einer kompressiblen Flüssigkeit.

Spezialfälle:

a) *Stationäre Strömung*, d. h. $\varrho$ hängt nicht von der Zeit ab, also $\dfrac{\partial\varrho}{\partial t}=0$.

$$\operatorname{div}(\varrho\cdot\overrightarrow{v})=0$$

b) *Inkompressible Flüssigkeit*, d. h. $\varrho$ ist constant

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{v})=0\qquad\text{(Inkompressibilitätsbedingung).}$$

Die letzte Beziehung bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt Zufluss und Abfluss für ein Volumenelement gleich sind.