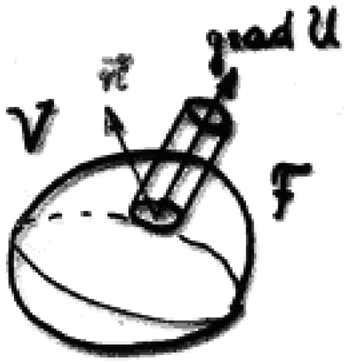
(GO): • Nachweis der Koordinatenunabhängigkeit der Divergenz eines Vektorfeldes (Literatur)

• Herleitung der Wärmeleitungsgleichung



$U(x,y,z,t)$ - Temperatur im (·) (x,y,z) zur Zeit t.
(stetig, erste + zweite part. Abl. stetig)

Physik. Experiment: Geschwindigkeit des Wärmeflusses ist negativ proportional zum Temperaturgradienten: $\vec{v} = -\underset{\substack{| \\ \text{Wärmeleitungskoeff.}}}{k} \operatorname{grad} U$ $\quad k>0$

Wärmemenge, die in Zeiteinheit V verläßt (durch Fläche F) ist $\iint\limits_F \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS$

$$\iint\limits_F \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS = -k \iint\limits_F \langle \operatorname{grad} U, \vec{n} \rangle dS \underset{\substack{\uparrow \\ (GO)}}{=} -k \iiint\limits_V \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\, dx\, dy\, dz$$

(da $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$)

$$\longrightarrow \boxed{\iint\limits_F \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS = -k \iiint\limits_V \Delta U\, dx\, dy\, dz}$$

Wärmemenge in V ist $\quad H = \iiint\limits_V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spezif. Wärme des Materials (konst.)}}}{\sigma} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dichte des Materials}}}{\rho}\, U\, dx\, dy\, dz$

Zeitliche Änderungsrate von H ist $-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint\limits_V \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$

$$\longrightarrow -\iiint\limits_V \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = -k \iiint\limits_V \Delta U\, dx\, dy\, dz$$

für <u>jedes</u> Teilgebiet V des betrachteten Körpers K

Deshalb $\quad \boxed{\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} = k \cdot \Delta U}$

Wärmeleitungsgleichung