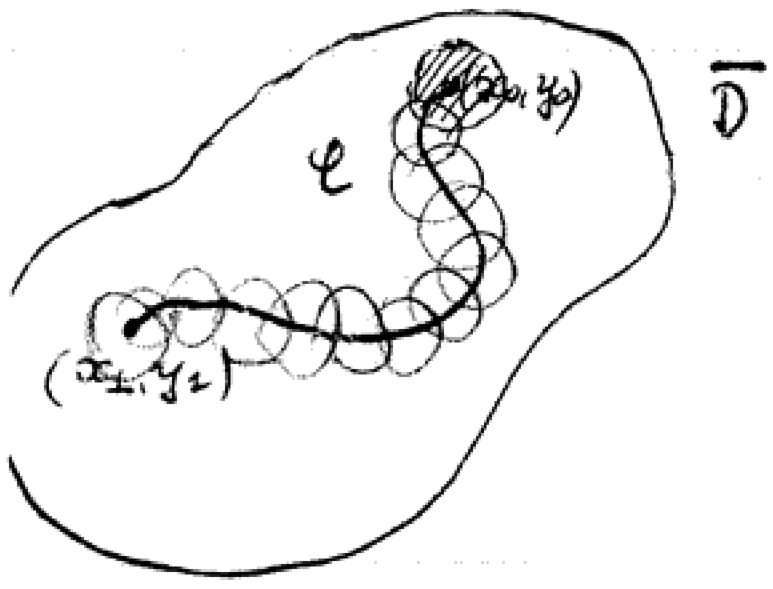
Satz 3 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)

Sei $u(x,y)$ harmonisch in D und stetig auf $D \cup \partial D$.
Dann kann die Funktion u weder ihr Maximum noch ihr Minimum in D annehmen, wenn u nicht const. ist.

D.h. eine harmonische Funktion in D, die stetig auf $\overline{D} = D \cup \partial D$ ist, kann ihr $\max\limits_{\overline{D}}$ und $\min\limits_{\overline{D}}$ nur auf dem Rand von D annehmen.

$\square$: $\overline{D} = D \cup \partial D$, $m = \min\limits_{\overline{D}} u(x,y)$, $M = \max\limits_{\overline{D}} u(x,y)$.

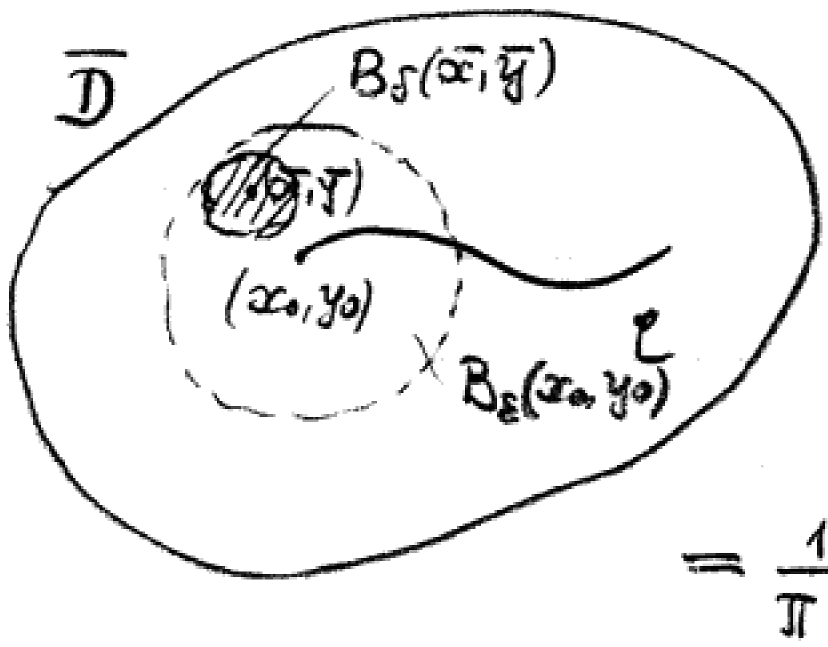
Wir nehmen an $\exists\, (x_0,y_0) \in D$ (innerer (·) von $\overline{D}$) mit $u(x_0,y_0) = M$.
Wenn $u \neq$ const, dann $\exists\, (x_1,y_1) \in D$ mit $u(x_1,y_1) < M$.



Wir verbinden (x_0,y_0) mit (x_1,y_1) durch eine glatte in D liegende Kurve $\mathcal{C}$.
Sei $\varepsilon > 0$ eine Zahl die kleiner als der Abstand von $\mathcal{C}$ und ∂D ist. Dann liegt die Kugel $B_\varepsilon(x_0,y_0)$ vollständig in D.
Wir zeigen jetzt: wenn der Wert von u im Zentrum der Kugel (also im (·) (x_0,y_0)) gleich M ist, dann gilt $u(x',y') = M$ für $\forall\, (x',y') \in B_\varepsilon(x_0,y_0)$.

Vom Gegenteil. Sei $(\bar{x},\bar{y}) \in B_\varepsilon(x_0,y_0)$ mit $u(\bar{x},\bar{y}) < M$. ($u(\bar{x},\bar{y}) > M$ ist unmöglich)
Dann: Stetigkeit von $u \rightsquigarrow u(x,y) < M$ in ganzer Umgebung $B_\delta(\bar{x},\bar{y})$,

wobei δ so klein gewählt werden kann, daß $B_\delta(\bar{x},\bar{y}) \subset B_\varepsilon(x_0,y_0)$ gilt.



Folgerung aus Satz 2

$$M = u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{B_\varepsilon(x_0,y_0)} u(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\left(\iint\limits_{B_\delta(\bar{x},\bar{y})} \overbrace{u(x,y)}^{<M}\,dx\,dy + \iint\limits_{B_\varepsilon(x_0,y_0)\setminus B_\delta(\bar{x},\bar{y})} \overbrace{u(x,y)}^{\le M}\,dx\,y \right) < \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\underbrace{\left(M\pi\delta^2 + M(\pi\varepsilon^2 - \pi\delta^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon^2} M\pi\varepsilon^2 = M.$$

i.e. $M < M$ ↯

Wir verschieben den Kreis $B_\varepsilon(x,y)$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$ von $(x_0,y_0) \rightsquigarrow (x_1,y_1)$.
Da unterwegs für alle Punkte aus $B_\varepsilon(x,y)$ nach dem Bewiesenen der Wert von u stets gleich M ist, kommen wir schließlich zu $u(x_1,y_1) = M$ ↯ mit $u(x_1,y_1) < M$
$\rightsquigarrow$ M kann nicht im Inneren von $\overline{D}$ angenommen werden.
Analog m kann nicht im Inneren von $\overline{D}$ angenommen werden. ■

Beispiel (Taschenrechner / Computer)

$z = x^3 - 3xy^2$ (Affensattel)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \rightsquigarrow \Delta z = 0$. Man betrachte $[-1,1] \times [-1,1]$.