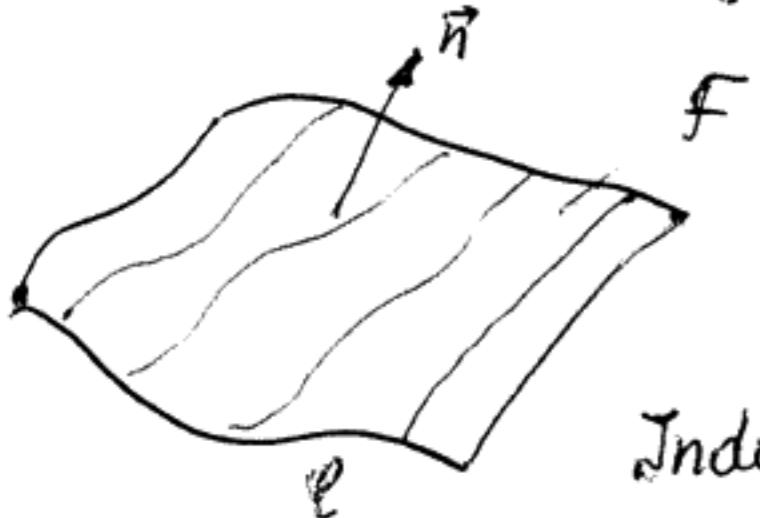


# Die Maxwell'schen Gleichungen (für ein ruhendes Medium)

- Seien  $\vec{B}$  die magnetische Induktion
- $\vec{D}$  die dielektrische Verschiebung
- $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke
- $\vec{H}$  die magnetische Erregung
- $\vec{I}$  der spezifische elektrische Strom
- $\vec{C}$  der Gesamtstrom  $\vec{C} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{I}$

Sei  $F$  eine beliebige Fläche in  $\mathbb{R}^3$  und die entsprechende Randkurve



dann haben die Maxwell'schen Gleichungen die Form

$$\text{Induktionsgesetz: } \iint_F \left\langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n} \right\rangle dF = - \oint_{\ell} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\text{Verketzungsgesetz: } \iint_F \langle \vec{C}, \vec{n} \rangle dF = \oint_{\ell} \langle \vec{H}, \vec{\tau} \rangle ds \quad (\text{elektromagnetisches})$$

wir wollen eine integralfreie Form dieser Formeln herleiten!

Nach dem klass. Stokes'schen Satz in der Rotationsform gelten

$$\oint_{\ell} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \iint_F \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle dF \implies \iint_F \left\langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \right\rangle dF = 0$$

$$\oint_{\ell} \langle \vec{H}, \vec{\tau} \rangle ds = \iint_F \langle \operatorname{rot} \vec{H}, \vec{n} \rangle dF \implies \iint_F \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{I} - \operatorname{rot} \vec{H}, \vec{n} \right\rangle dF = 0$$

diese Beziehungen gelten für eine beliebige Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$ .

wir zeigen nun, dass daraus folgt, dass die beiden ersten Ausdrücke in den Skalarprodukten verschwinden!

## Lemma.

Sei  $\vec{a}(x, y, z)$  ein Vektorfeld in einem offenen Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{a} \in C_c^1(G)$ . Für jede Fläche  $F \subset G$  gelte  $\iint_F \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle dF = 0$ .

Dann ist  $\vec{a}(x, y, z) = 0$  für alle  $(x, y, z) \in G$ .

Beweis enthält analoge Überlegungen wie  
die Beweise der Sätze 1 und 3.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \int f dA = 0 \xrightarrow{?} f = 0 \\ \text{für vorgegebene } f \text{ ist das trivial} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

□: Vom Gezeigteil.  $\exists \underline{(x_0, y_0, z_0)} \in G$  mit  $\vec{a}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . IX. 13. 19

Stetigkeit von  $\vec{a}$   
Offenheit von  $G$   $\xrightarrow{u_0}$   $\exists$  eine Kugel  $B(u_0, r) \subset G$  mit  $\vec{a}(u) \neq 0 \forall u \in B$ .  
Somit hat man für  $\varepsilon = \frac{1}{2} \|\vec{a}(u_0)\|$   
 $\exists \delta > 0$  mit

$$\|u - u_0\| < \delta \implies \|\vec{a}(u) - \vec{a}(u_0)\| < \varepsilon.$$

Dann gilt.

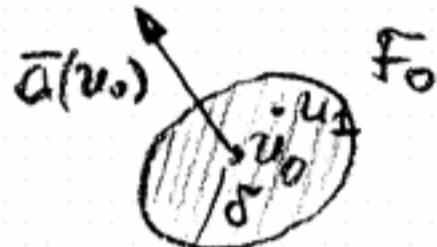
$$0 \leq \|\vec{a}(u) - \vec{a}(u_0)\|^2 = \langle \vec{a}(u) - \vec{a}(u_0), \vec{a}(u) - \vec{a}(u_0) \rangle = \|\vec{a}(u)\|^2 + \|\vec{a}(u_0)\|^2 - 2 \langle \vec{a}(u), \vec{a}(u_0) \rangle.$$

$$\text{Also } \|\vec{a}(u)\|^2 + \|\vec{a}(u_0)\|^2 - 2 \langle \vec{a}(u), \vec{a}(u_0) \rangle = \|\vec{a}(u) - \vec{a}(u_0)\|^2 < \varepsilon^2 = \frac{1}{4} \|\vec{a}(u_0)\|^2,$$

$\implies \|\vec{a}(u)\|^2 + \frac{3}{4} \|\vec{a}(u_0)\|^2 < 2 \langle \vec{a}(u), \vec{a}(u_0) \rangle$ , woraus noch ergibt.

$$0 < \frac{3}{8} \|\vec{a}(u_0)\|^2 \leq \frac{3}{8} \|\vec{a}(u_0)\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{a}(u)\|^2 \leq \underline{\langle \vec{a}(u), \vec{a}(u_0) \rangle},$$

Sei jetzt  $F_0$  eine Kreisfläche mit Mittelpunkt im ( $\cdot$ )  $u_0$ , auf der der Vektor  $\vec{a}(u_0)$  senkrecht steht mit Radius  $\delta$ . Der Normaleneinheitsvektor an  $F_0$  in ( $\cdot$ )  $u_0$  ist  $\vec{n}_0 = \frac{\vec{a}(u_0)}{\|\vec{a}(u_0)\|}$ . Wir bemerken, dass für alle Punkte aus  $F_0$   $\vec{n}(u) = \vec{n}_0$  gilt.



$$\begin{aligned} \bullet \quad \iint_{F_0} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle dF &\xrightarrow{\text{Mittelwertsatz f\"ur Oberfl\"ache = integrale}} \exists u_1 \in F_0 \text{ mit } \iint_{F_0} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle dF = \langle \vec{a}(u_1), \vec{n}_0 \rangle \cdot \pi \delta^2 \\ &\quad \vec{n}(u) = \vec{n}_0 \quad \text{Kreisfl\"ache} \\ \text{Andererseits lt. Voraussetzung} \quad \iint_{F_0} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle dF &= 0 \quad \xrightarrow{\quad} \langle \vec{a}(u_1), \vec{a}(u_0) \rangle = 0 \quad \nmid \langle \vec{a}(u), \vec{a}(u_0) \rangle \neq 0 \quad \text{f\"ur } \|u - u_0\| < \delta. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Leeresatzes erhalten wir nun:

Maxwell-Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} = \operatorname{rot} \vec{H} \end{array} \right.$$