- 1. und 2. GREEN sche Formel

Zwei skalare Funktionen f, g seien auf $K \subset \mathbb{R}^3$ gegeben.
Rand von K sei die <u>glatte</u> Oberfläche $\mathfrak{F}$
f, g und alle partiellen Ableitungen seien <u>stetig</u> auf K.
Bilden das Vektorfeld

$$\vec{u} = f \cdot \operatorname{grad} g\ .$$

$\vec{n}$ äußere Normale (Einheitsvektor) an $\mathfrak{F}$.
Wir berechnen:

(i) $$\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{n}, f \cdot \operatorname{grad} g \rangle = f \cdot \langle \vec{n}, \operatorname{grad} g \rangle \underset{\text{VI (10)}}{=} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n}$$

$$\vec{u} = f \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$$

(ii) $$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} g) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} =$$

$\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$ $\qquad$ $f \cdot \Delta g$

$$= \underline{f \cdot \Delta g} + \underline{\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle}.$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{u}\, dx\,dy\,dz \underset{\text{Div.-form (GO)}}{=} \iint_{\mathfrak{F}} \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle\, dS = \iint_{\mathfrak{F}} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n}\, dS$$

$\Longrightarrow$ $$\boxed{\iiint_K \left(f \cdot \Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{F}} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n}\, dS}$$

1. GREEN sche Formel

analoge Formel und $\Longrightarrow$ zusammengefaßt

$$\boxed{\iiint_K \left(f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{F}} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial n} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial n}\right) dS}$$

2. GREEN sche Formel

$g \equiv 1$

$$\iiint_K \Delta f\, dx\,dy\,dz = \iint_{\mathfrak{F}} \frac{\partial f}{\partial n}\, dS$$

$g \equiv 1$
f, erste und zweite part. Abl seien stetig auf K

f ist in K harmonisch ($\Delta f = 0$) $\Longleftrightarrow$ $\iint_{\mathfrak{F}} \frac{\partial f}{\partial n}\, dS = 0$ für $\forall$ geschlossene orient. Obfl.