⑥ Der adjungierte Operator

$T: X \longrightarrow Y$ lin. stetiger Operator, X, Y normierte Räume. X', Y' seien die Dualräume von X und Y.

Die Abbildung $T': Y' \longrightarrow X'$ definiert durch

$$T'g = \underbrace{gT}_{f} \quad \forall g \in Y',$$

also jedem linearen stetigen Funktional $g \in Y'$ wird ein lineares stetiges Funktional $f \in X$ zugeordnet, und zwar

$(T'g)(x) = f(x) = (gT)(x) = g(Tx) \quad \forall x \in X$, heißt der zu T adjungierte Operator (auch dualer Operator)

- T' ist offenbar linear
- T' ist stetig, als Superposition der stetigen Abbn. g, T

$\Big\}\ T' \in B(Y', X')$.

Wir berechnen $\|T'\|$: Es gilt • $\|T'\| = \|T\|$.

□ $|(T'g)(x)| = |g(Tx)| \le \|g\| \, \|Tx\| \le \|g\| \cdot \|T\| \, \|x\| \quad \forall x \in X \rightsquigarrow \underbrace{\|T'g\| \le \|T\| \cdot \|g\|}_{\forall g \in Y'}$

$\downarrow$

$\|T'\| \le \|T\|$.

Andererseits (gilt die folgende Formel für die Norm eines Elements y aus Y):

$$\|Tx\| = \sup_{\substack{\|g\|=1 \\ (g \in Y')}} |g(Tx)| = \sup_{\|g\|=1} |(T'g)(x)| \le \sup_{\|g\|=1} \underbrace{\|T'g\|}_{\|T'\|} \cdot \|x\| = \|T'\| \cdot \|x\|. \rightsquigarrow \|T\| \le \|T'\|. \blacksquare$$

Beispiel. ℓ^1 – Menge aller komplexen Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty .$$

$$\ell^1 \ni x \qquad \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| .$$

$(\ell^1)' = m$ Menge aller beschränkten Zahlenfolgen:

$$m \ni x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots) \quad \exists\, C_x > 0 \quad |x_n| \le C_x \ \forall n$$

Sei $A = (a_{ij})$ eine unendliche Matrix mit endl. sup aller Zeilensummen:

$$\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty .$$

Dann ist $T: \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ mit $(Tx)_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j$ ein linearer stetiger Oper.

Durch $(T'g)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} g_n$ ist der adjungierte Operator $T': m \longrightarrow m$ definiert.

(Situation ist aus Lin. Algebra bekannt: $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$)

Hilbertraum. Sei $T \in B(\mathbb{H})$.

Der zu T adj. Op. T' bildet dann $\mathbb{H}' \longrightarrow \mathbb{H}'$ ab. Da wir aber $\mathbb{H}'$ nach dem Satz von Riesz mit $\mathbb{H}$ identifizieren können, paßt man die Definition des adj. Op. in einem Hilbertraum diesem Umstand an:

$T \in B(\mathbb{H})$; $y \in \mathbb{H}$ fixiert. Dann definiert

$f_y(x) := \langle Tx, y\rangle \quad \forall x \in \mathbb{H}$ ein lineares und wegen

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \underbrace{\|T\| \cdot \|y\|}_{C} \cdot \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{H}$$

auch ein stetiges Funktional auf $\mathbb{H}$.

Satz von Riesz $\rightsquigarrow$ $\exists! \, v \in \mathbb{H}$ mit $\|v\| = \|f_y\|$ und $f_y(x) = \langle x, v\rangle \quad \forall x \in \mathbb{H}$

Wir haben: $\mathbb{H} \ni y \longmapsto v \in \mathbb{H}$, d.h. eine Abb. $v = T^* y$.

Es gilt also $\langle Tx, y\rangle = f_y(x) = \langle x, T^* y\rangle$.

$y \longmapsto T^* y$ ist ein linearer beschränkter Operator, der (Hilbert-) adjungierte zu T.

Man behält auch Bezeichnung T' bei.

Es gilt also $\boxed{\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$.

Kleiner Unterschied:

Hilbertraum: $(\alpha T)' = \bar{\alpha} T' \quad (\alpha \in \mathbb{C})$ (wegen Skalarprodukt)

Banachraum: $(\alpha T)' = \alpha T' \quad (\alpha \in \mathbb{C})$.

Eigenschaften des adjungierten Operators im Hilbertraum $\mathbb{H}$.

1. $\overline{R(T)} = (\ker(T^*))^{\perp} := \{x \in \mathbb{H} : \langle x, y\rangle = 0, \; y \in \ker(T^*)\}$

   (wenn $\mathbb{H}$ endl.-dim, dann gilt: $R(T) = (\ker(T^*))^{\perp}$)

2. wenn $R(T)$ abgeschlossen ist, dann ist es auch $R(T^*)$, und es gilt

   $R(T^*) = (\ker(T))^{\perp} = \{y \in \mathbb{H} : \langle x, y\rangle = 0, \; x \in \ker(T)\}$.

3. $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$, $(ST)^* = T^* S^*$.

4. $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$: falls einer dieser Operatoren existiert, dann $\exists$ auch der andere, und es gilt die Gleichheit.

5. $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

6. $(T^*)^* = T$ $\quad \square$: T^* ist lin. und stetig $\rightsquigarrow \exists (T^*)^*$. Er genügt der Identität $\langle T^* x, y\rangle = \langle x, (T^*)^* y\rangle$. Andererseits gilt

   $\langle T^* x, y\rangle = \overline{\langle y, T^* x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle$ $\quad \langle x, (T^*)^* y\rangle = \langle x, Ty\rangle \; \forall x, y \in \mathbb{H}$.

   d.h. $(T^*)^* y = Ty \; \forall y \in \mathbb{H} \longrightarrow (T^*)^* = T$. ■

Definition: Sei $T \in B(H)$. T heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$.
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H$

Beispiele 0) $I = I^*$

1.) Wenn $A = (a_{ij})$ eine unendl. Matrix mit $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$, dann definiert

$$(Tx)_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j \qquad n = 1, 2, \dots$$

einen linearen beschränkten Operator $\ell^2 \longrightarrow \ell^2$.

Skalarprodukt in ℓ^2 ist $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Es gilt $\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (Tx)_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j \overline{y_n} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{nj}}\, y_n} = \underbrace{\langle x, T^* y\rangle}_{\text{für eine Abb. } T^*}$,

mit $(T^* y)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{nj}}\, y_n$. T^* ist somit der adj. Operator zu T.

Der adjungierte Operator $T^* : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ hat ebenfalls eine Matrixdarstellung, wobei man die Matrix aus A durch Übergang zur konjugiert komplexen Matrix und dann zur transponierten erhält.

$$A = (a_{ij}) \longleftrightarrow T \qquad\qquad T^* \longleftrightarrow A^* = (\overline{a_{ji}})$$

Der Operator T ist selbstadjungiert genau dann, wenn $A = A^*$ gilt, d.h. wenn A eine Hermite'sche Matrix ist.

2) Sei $H_0 \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum von H.

Dann ist (Satz 1 aus ③) der Projektor $P : H \longrightarrow H_0$ definiert:

$\forall x \in H \quad \exists!\ x = x_0 + x'$ mit $x_0 \in H_0$ und $x' \perp H_0$.

$Px = x_0$. Offensichtlich gilt $Px = x \Longleftrightarrow x \in H_0$.

Projektoren sind im Hilbertraum folgendermaßen charakterisiert:

Satz 1. Ein linearer Operator P in H ist ein Projektor
$\Longleftrightarrow$ (i) $P^* = P$ (selbstadjungiert)
3.7 (ii) für $\forall x \in H$ gilt $P^2 x = Px$. (nilpotent)

□ $\Longrightarrow$: $\forall x, y \in H$. $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, $x_0, y_0 \in H_0$, $x', y' \perp H_0$, $Px = x_0$, $Py = y_0$

- $\langle Px, y\rangle = \langle x_0, y_0 + y'\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \underbrace{\langle x_0, y'\rangle}_{=0} \overset{\langle x', y_0\rangle = 0}{=} \langle x_0 + x', y_0\rangle = \langle x, Py\rangle$.

- Aus $Px_0 = x_0$ für $x_0 \in H_0$ folgt $P(\underbrace{Px}_{\in H_0}) = Px \quad \forall x \in H$.

$\Longleftarrow$: Sei $H_0 = \{x \in H$ mit $Px = x\}$. Dann ist H_0 ein abgeschl. Teilraum.
P ist ein Projektor auf H_0:
1 $x \in H$. $x = Px + (x - Px)$. Man muß zeigen
- $Px \in H_0$ und
- $(x - Px) \perp H_0$.

$P(Px) = Px$ (wegen (ii)) $\rightsquigarrow Px \in H_0$.

Sei z ein beliebiges Element aus H_0. Dann gilt

$$\langle x - Px, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle Px, z\rangle \underset{P^*=P}{=} \langle x, z\rangle - \langle x, \underbrace{Pz}_{=z}\rangle = 0.$$

Demzufolge $(x - Px) \perp H_0$. ∎

Informationen über das Spektrum eines <u>selbstadjungierten</u> Operators enthält

<u>Satz 2.</u> 1) Für jedes $x \in H$ gilt $\|(T - \lambda I)x\| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda| \cdot \|x\|$.

2) $\sigma(T)$ liegt auf der reellen Achse.

3) Seien λ_1, λ_2 zwei Eigenwerte von T mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann sind die zugehörigen Eigenräume orthogonal.

□! 1.) Sei $\lambda = \mu + i\nu$. Wir bemerken zunächst: wenn T selbstadj, dann ist auch $T - \mu I$ selbstadjungiert. (selbst)

□: $(T-\mu I)^* = T^* + (-\mu I)^* \underset{(\mu \text{ reell})}{=} T^* - \mu I^* = T - \mu I$. ∎

Wir berechnen $\|(T-\lambda I)x\|^2 = \langle (T-\lambda I)x, (T-\lambda I)x\rangle = \langle (T-(\mu+i\nu)I)x, (T-(\mu+i\nu)I)x\rangle =$

$= \langle (T-\mu I)x, (T-\mu I)x\rangle + \langle (-i\nu)x, (-i\nu)x\rangle + \underbrace{i\nu\langle (T-\mu I)x, x\rangle - i\nu\langle x, (T-\mu I)x\rangle}_{=0,\ \text{da } T-\mu I \text{ selbstadj.}} =$

$\langle (T-\mu I)x, (T-\mu I)x\rangle = \|(T-\mu I)x\|^2$

$= \|(T-\mu I)x\|^2 + \nu^2\|x\|^2 \underset{\sqrt{\nu^2} = |\nu| = |\mathrm{Im}\,\lambda|}{\rightsquigarrow} \|(T-\lambda I)x\| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda| \cdot \|x\|$.

2). Nach Satz 1 aus (5) ist bei $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ der Operator $T - \lambda I$ wegen der in 1.) bewiesenen Ungleichung <u>invertierbar</u>

$\Updownarrow$

$\lambda \in \rho(T)$.

Also gilt $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn $\nu = 0$, also λ reell.

3.) λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ H_{λ_1}, H_{λ_2} Eigenräume. Seien $x_i \in H_{\lambda_i}$ $i = 1, 2$ $(x_i \neq 0)$

Dann gilt

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle \underset{x_1\in H_{\lambda_1}}{=} \langle Tx_1, x_2\rangle \underset{T=T^*}{=} \langle x_1, Tx_2\rangle \underset{x_2 \in H_{\lambda_2}}{=} \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \underset{\lambda_2 \text{ reell}}{=} \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

$$\rightsquigarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0 \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\rightsquigarrow} \langle x_1, x_2\rangle = 0$$ ∎

<u>Bemerkung</u>: Für einen selbstadj. Operator $T \in B(H)$ gelten außerdem:

- $\langle Tx, x\rangle$ ist stets reell $\forall x \in H$ (selbst)
- $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$ mit $m(T) = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ u. $M(T) = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$
- $m(T), M(T) \in \sigma(T)$ und $\|T\| = \max\{|m(T)|, |M(T)|\}$.