7 Kompakte Operatoren im Banachraum

7.1 Kompakte Operatoren und Beispiele

X, Y normierte Räume, $T: X \longrightarrow Y$ linearer Operator

Definition: T heißt **kompakt** (oder **vollstetig**), wenn das Bild $T(A)$ jeder beschränkten Teilmenge $A \subset X$ eine relativ kompakte Teilmenge aus Y ist.

($X \supset A$ **beschränkt**, wenn $\exists\, M > 0$ mit $\|x\| \le M$ $\forall x \in A$)

(Eine Menge $K \subset X$: **kompakt**, wenn jede Folge $\{x_n\}$, $x_n \in K$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K enthält.)

(Eine Menge K heißt **relativ kompakt**, wenn ihre Abschließung $\bar{K}$ kompakt ist.)

Äquivalent dazu: Ein lineares Operator T ist kompakt, genau dann, wenn für jede beschränkte Folge $\{x_n\}$, die Bild-Folge $\{Tx_n\}$ eine konvergente Teilfolge enthält.

Satz 1. Jeder kompakte lineare Operator ist beschränkt (und damit stetig).

□: Die Einheitskugel $B(\mathbb{O}, 1) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ ist eine beschränkte Menge $\underset{T\text{ komp.}}{\leadsto}$ $\overline{T(B(\mathbb{O};1))}$ ist kompakt $\leadsto$ $T(B(\mathbb{O};1))$ ist beschränkt, d.h.

$\exists\, M > 0$ mit $\|Tx\| \le M$ $\forall x$ $\|x\| \le 1$ $\leadsto$ $\underbrace{\sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|}_{\|T\|} \le M$

s. 4 ∎

Satz 2. Sei $\{T_n\}$ eine Folge kompakter Operatoren in $B(X,Y)$. Wenn $\{T_n\}$ gegen einen Operator T (im Raum $B(X,Y)$) konvergiert, dann ist T ein kompakter Operator.

Beispiele: 1) Wenn $R(T)$ endlich-dimensional, dann ist T kompakt. (im endl.-dim. Banachraum ist jede beschränkte Teilmenge relativ kompakt)

2) $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ $\quad (Tx)_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j \quad n = 1, 2, \dots$

mit der Matrix $A = (a_{ij})$, die der Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$ genügt.

- $P_n: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ mit

$P_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, \dots x_n, 0, 0, \dots)$

$R(P_n)$ ist endl.-dim $\leadsto$ P_n kompakt $\forall n$

$\longrightarrow$ $P_n T$ ist endl. dim. Operator $\leadsto$ $P_n T$ komp. $\forall n$

$$\|P_nT - T\| \le \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Satz 2 $\Downarrow$

T kompakt.

3) $X = Y = C[a,b]$. Wir betrachten den linearen Integraloperator $\mathcal{K}: X \longrightarrow X$, $y = \mathcal{K}x$ mit

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$$

mit dem Kern $K(t,s) \in C([a,b]\times[a,b])$.

$\mathcal{K}$ ist ein kompakter Operator.

4) $X = Y = L^2[a,b]$.

Dann ist der Integraloperator $\mathcal{K}$ mit stetigem Kern (s. 3)) ein kompakter Operator.

5) $\Omega \subset R^n$ beschränkte abgeschlossene Menge.

Wir betrachten $X = Y = L^2(\Omega)$ und den linearen Integraloperator $\mathcal{K}$ aus Beispiel 3), wobei wir vom Kern $K(t,s)$ jetzt fordern

$$\int_\Omega\int_\Omega |K(t,s)|^2\,ds\,dt < +\infty \qquad (\text{d.h. } \underbrace{K(t,s) \in L^2(\Omega\times\Omega)}).$$

nach Definition des Raumes $L^2(\Omega\times\Omega)$ gibt es eine Folge stetiger Funktionen $\{K_n(t,s)\}$ auf $\Omega\times\Omega$ mit $\|K_n - K\|_{L^2} \xrightarrow[n]{} 0$,

$$\text{d.h.} \int_\Omega\int_\Omega |K(t,s) - K_n(t,s)|^2\,ds\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sei $\mathcal{K}_n$ der Integraloperator mit dem Kern $K_n(t,s)$.

Es gilt nun

$$|\mathcal{K}x - \mathcal{K}_nx|^2 = \left|\int_\Omega [K(t,s) - K_n(t,s)]\,x(s)\,ds\right|^2 \overset{\text{Hölder-Ungleichung}}{\le} \int_\Omega |K(\,,\,) - K_n(\,,\,)|^2 ds \int_\Omega |x(s)|^2 ds$$

woraus man

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}_nx\|^2 = \int_\Omega |\mathcal{K}x - \mathcal{K}_nx|^2 dt \le \int_\Omega\int_\Omega |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 ds\,dt \cdot \|x\|^2$$

und schließlich $\|\mathcal{K}-\mathcal{K}_n\|^2 \le \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K(t,s)-K_n(t,s)|^2 ds\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\limits_{\|x\|\le 1}$

erhält.

Die Operatoren $\mathcal{K}_n$ sind nach Beispiel 4) kompakt.

Dann ist $\mathcal{K}$ kompakt nach Satz 2.

Satz 3 (Schauder)

Sei $T \in B(X,Y)$, X normierter Raum, Y Banachraum.

Dann ist T kompakt $\Longleftrightarrow$ T' kompakt.

7.2 Riesz-Schauder Theorie. Fredholm'sche Alternative

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = y(t)$$

Fredholm'sche Integralgleichung 2. Art

$$\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = y(t)$$

Fredholm'sche Integralgleichung 1. Art

$T: X \longrightarrow X$

komp. lin. Operator im Banachraum X

$$\lambda x - Tx = y$$

Operatorgleichung 2. Art

$$Tx = y$$

Operatorgleichung 1. Art

Die Lösungstheorie der Gleichungen 2. Art erweist sich als einfacher als die für Gleichungen 1. Art.

Lösungstheorie 2. Art: für Integralgleichungen Fredholm Anf. 20. Jhd.

für Operatorgleichungen mit komp. T Riesz / Schauder Mitte der 30-er

Satz 4 (Fredholm'sche Alternative)

Sei X ein Banachraum und $T \in B(X)$ ein kompakter Operator.
Sei $\lambda \ne 0$ und betrachten wir die beiden Gleichungen

$$(\lambda I - T)x = y \quad (1) \quad \text{und} \quad (\lambda I - T)x = \mathbb{O} \quad (2).$$

Dann gilt eine der folgenden beiden Alternativen

(I) Die homogene Gleichung (2) besitzt nur die triviale Lösung.

In diesem Falle gelten

- $\lambda \in \rho(T)$
- $(\lambda I - T)^{-1}$ ist beschränkt
- die inhomogene Gleichung (1) besitzt für jede rechte Seite $y \in X$ genau eine Lösung $x = (\lambda I - T)^{-1} y$.

(II) Die homogene Gleichung (2) besitzt eine von 0 verschiedene Lösung.

In diesem Falle hat die inhomogene Gleichung (1) eine (garantiert nicht einzige) Lösung $\Longleftrightarrow$ wenn die rechte Seite y der Gleichung $\langle y, f \rangle = 0$ genügt für jede Lösung f der homogenen adjungierten Gleichung
$$\lambda f = T' f.$$

Interessant ist, daß dieser Satz erfolgreich für die Existenz von Lösungen von RWP elliptischer partieller Dgln. eingesetzt werden kann. Maximumprinzipien sichern dabei, daß Alternative (I) zutrifft.

7.3 Das Spektrum eines kompakten Operators

Aus Satz 4 geht hervor: wenn $\lambda \neq 0$ im Spektrum liegt, d.h. (II) trifft zu, dann besitzt (2) eine nichttriviale Lösung, d.h.

λ ist ein Eigenwert von T.

Weitere Informationen enthalten die folgenden Sätze.

Satz 5.

Sei X ein unendl. dim. Banachraum und $T \in B(X)$ ein kompakter Operator.
Dann besteht das Spektrum $\sigma(T)$ aus $\lambda = 0$ und den von 0 verschiedenen Eigenwerten.
Dabei ist jeder Eigenraum zu einem von 0 verschiedenen Eigenwert endlichdimensional.

Satz 6.

Die Menge der Eigenwerte eines kompakten linearen Operators im Banachraum ist entweder endlich oder abzählbar. Sie besitzt keine Häufungspunkte, außer evt. 0.

Bemerkung: Alle von 0 verschiedenen Eigenwerte von T kann man durchnumerieren und dem Modul nach ordnen:
$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots > 0.$$
Gibt es unendlich viele λ_k, dann gilt $\lambda_k \longrightarrow 0$.