⑧ Kompakte selbstadjungierte Operatoren

Aus ⑥ ⑦ $\rightsquigarrow$ Spektraleigenschaften von kompakten Operatoren und von selbstadjungierten sind gut untersucht.

Wir untersuchen nun den Fall, daß $\mathbb{H}$ ein separabler Hilbertraum und

$T: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ selbstadjungiert und kompakt, linear.

Satz 1. Sei T ein selbstadj. komp. Operator im separablen Hilbertraum. Dann existiert ein Eigenwert λ von T mit

$$|\lambda| = \|A\| \quad (\text{d.h. } \lambda \text{ ist entweder } +\|A\| \text{ oder } -\|A\|).$$

Insbesondere besitzt ein selbstadj. komp. Operator $T \neq 0$ einen von 0 verschiedenen Eigenwert.

Satz 2. (Hilbert - Schmidt)
Sei T ein selbstadj. komp. Operator im separablen Hilbertraum H. Dann existiert in $\mathbb{H}$ eine Basis aus Eigenvektoren des Operators T.

Bemerkung zu Satz 6 aus ⑦: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ verschiedene $\neq 0$ Eigenwerte T
H_{λ_1} $H_{\lambda_2}, \ldots$ Eigenräume, orthogonal nach Satz 2 aus ⑥.
Satz 5 aus ⑦ endl.-dim.

In jedem H_{λ_k} wählt man nun eine Basis aus Eigenvektoren zum EW λ_k $\rightsquigarrow$ orthogonalisieren nach dem Schmidt'schen Verfahren (③).

Sei $\{\varphi_n\}$ nun die Menge aller orthonormierten Eigenvektoren von T. Man zeigt nun, daß die Abschließung der linearen Hülle der Menge $\{\varphi_n\}$ gerade H ergibt, Eigenvektoren zu evt. $\lambda = 0$ sind mit zu berücksichtigen:

$$\overline{\text{lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}} = \mathbb{H}.$$

Dann ist $\{\varphi_n\}$ eine Basis in H.

Der nächste Satz zeigt, daß ein selbstadj. kompakter Operator diagonaliert werden kann $\rightsquigarrow$ seine „unendl. Darstellungsmatrix" bezüglich der Basis $\{\varphi_n\}$ ist von Diagonalgestalt.
(wie in der Lin. Algebra für symm. oder Hermite-Matrizen)
Als Folgerung aus dem Satz von Hilbert-Schmidt ergibt sich

Satz 3 (kanonische Form eines selbstadj. komp. Operators)
Für jeden selbstadjungierten kompakten Operator T im separablen Hilbertraum H gilt

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n .$$

jedes λ_n kommt so oft vor, wie seine Vielfachheit angibt.

In der Basis $\{ \underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{\varphi_{k_1+1}, \dots, \varphi_{k_2}}_{\lambda_2}, \dots\dots, \underbrace{\varphi_{k_{n-1}+1}, \dots, \varphi_n}_{\lambda_n}, \dots, \underbrace{\quad}_{\lambda=0} \}$

hat der Operator T die „diagonale Matrix"*:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & 0 & & 0 \\ & & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ \hline & & 0 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right).$$

Satz 4. Sei T ein selbstadj. kompakter Operator im separablen Hilbertraum $\mathbb{H}$.
Wenn $\lambda \in \rho(T)$, dann besitzt die Gleichung

$$(\lambda I - T)x = y$$

für $\forall y \in \mathbb{H}$ eine eindeutige Lösung der Form

$$x = R_\lambda(T)y = (\lambda I - T)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n .$$

(Die Struktur der Resolvente als Operatorfunktion mit Polstellen in den Eigenwerten ist hieraus erkennbar)

$\square$: $\lambda \in \rho(T) \rightsquigarrow \exists\, R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Somit ist für jede rechte Seite $y \in \mathbb{H}$ die Gleichung

$$\lambda x - Tx = y \qquad \text{eindeutig lösbar.}$$

Sei $y \in \mathbb{H}$ fest und $x^* = (\lambda I - T)^{-1} y$ die Lösung der Gleichung: $\lambda x^* - Tx^* = y$.

Satz 2 $\rightsquigarrow$ $x^* = \sum_n \langle x^*, \varphi_n \rangle \varphi_n$, $y = \sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n$ (Fourierreihen von x^*, y bez. Basis $\{\varphi_n\}$)

Satz 3 $\rightsquigarrow$ $Tx^* = \sum \lambda_n \langle x^*, \varphi_n \rangle \varphi_n$

$$\rightsquigarrow \lambda x^* - Tx^* = y \iff \sum_n (\lambda - \lambda_n) \langle x^*, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

Bilden Skalarprodukt mit φ_j: $\sum_n (\lambda - \lambda_n) \langle x^*, \varphi_n \rangle \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_j \rangle} = \sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, \varphi_j \rangle$

$\langle \varphi_n, \varphi_j \rangle = \delta_{nj}$: $\quad (\lambda - \lambda_j) \langle x^*, \varphi_j \rangle = \langle y, \varphi_j \rangle$

Daraus erhält man $\langle x^*, \varphi_j \rangle = \dfrac{\langle y, \varphi_j \rangle}{(\lambda - \lambda_j)}$ und nach Einsetzen dieser Ausdrücke

$$x^* = \sum_n \frac{\langle y, \varphi_n \rangle}{(\lambda - \lambda_n)} \varphi_n , \quad \text{d.h.} \quad x^* = R_\lambda(T) y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n . \quad \blacksquare$$