Begriffe der Integralrechnung 2. Semester

3. April 2006

1 Treppenfunktion

Treppenfunktion Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es Zahlen $a_0 < a_1 < ... < a_n$ gibt so dass gilt:

1. f konstant in den offenen Teilintervallen (a_i, a_{i+1})
2. $f(x) = 0 \forall x \notin [a_0, a_n]$

Treppenfunktion auf [a,b] ist eine Funktion f, wenn es eine Zerlegung von $[a, b]$ gibt, so dass obige Eigenschaft 1 für f erfüllt ist.

Gleichheit fast überall sind zwei Treppenfunktionen f, g, in Zeichen $f = g$ f.ü., wenn gilt: $f(x) = g(x) \forall x$ bis auf endlich viele x.

Integral über Treppenfunktionen Sei $F \in T(a, b)$ und sei bzgl. einer Zerlegung $Z : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ und f habe in (x_{k-1}, x_k) den Wert c_k, dann setzt man:

$$\int f(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = c_k * l(I_k)$$

Dieses Integral ist *linear, monoton* (aus $f(x) \leq g(x)$ folgt $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$) und *beschränkt* ($\left|\int f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)*max_{x\in[a,b]}|f(x)|$)

2 Riemann-Integral

Ober- und Unterintegral Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man:

$$\int_a^b {}^*f(x)dx := inf\left\{\int h(x)dx | h \in T(a, b), h \geq f\right\}$$

Oberintegral von f über $[a, b]$ und

$$\int_a^b {}_*f(x)dx := sup\left\{\int g(x)dx | h \in T(a, b), h \leq f\right\}$$

Unterintegral von f über $[a, b]$.

Riemann-Integrierbarkeit Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion heißt *Riemann-integrierbar,* wenn gilt: Oberintegral = Unterintegral, also

$$\int_a^b {}^*f(x)dx = \int_a^b {}_*f(x)dx$$

Ist das der Fall, setzt man $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b {}^*f(x)dx \, (= \int_a^b {}_*f(x)dx)$. Die Menge aller über $[a, b]$ intbaren Funktionen wird mit $R(a, b)$ bezeichnet. Vereinbarung:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Integrierbarkeit Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig und beschdränkt $\Rightarrow$ *f über G integrierbar.*
Weitere hinreichende Bedingung: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. f heißt *integrierbar über G*, wenn ein $c > 0$ existiert so dass $\sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |f(x)|dx \leq c$ für je endlich viele abgeschlossene nicht überlappende Quader $Q_j \subseteq G$.

Riemannsches Integrabilitätskriterium f ist R-integrierbar über $[a, b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \, g, h \in T(a, b)$ mit: $g \leq f \leq h$ und $\int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx \leq \epsilon$

Hinreichend für R-Integrierbarkeit

1. Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist R-Intbar ($C(a, b) \subseteq R(a, b)$)
2. Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist R-Intbar.
3. Jede auf $[a, b]$ beschränkte Funktion mit endlich vielen Sprungstellen ist R-Intbar.

R-Intbarkeit komplexer Funktionen Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ (beschränkt). Dann kann man schreiben: $f(x) = u(x) + i * v(x)$. Wenn $u, v \in R(a, b)$, dann sagt man: f ist R-intbar und setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx$$

Standartabschätzung Sei $f \in R(a, b)$, dann gilt:

1. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b - a) * sup \, |f(x)|$[1]
2. Aus $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ folgt $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

[1] Erster Teil heißt auch "Dreiecksungleichung für Integrale"

Stammfunktion Eine Funktion F heißt *Stammfunktion von f auf $[a,b]$*, wenn $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$.
Achtung: Existenz einer Stammfunktion auf $[a,b]$ $\not\Leftrightarrow$ Integrierbarkeit auf $[a,b]$

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung Sei f auf $[a,b]$ stetig, G eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt: $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b$

Jordan-Nullmenge Eine beschränkte Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Nullmenge* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Quader $Q_1, ..., Q_n$ existieren, so dass $N \subseteq \cup_{i=1}^n Q_i$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^n \nu_n(Q_i) < \epsilon$.
Eine *unbeschränkte Menge* heißt Jordan-Nullmenge, wenn jede beschränkte Teilmenge eine Jordan-Nullmenge ist.

Jordan-Maß Definiere $|M| := \sum_{i=1}^n |Q_i|$, wobei $|Q_i|$ Inhalt vom Quader(= $\mathbb{R}^n$-Intervall) Q_i. Sei $M \in \mathbb{R}^n$, J, K Intervallsummen mit $J \subset M \subset K$. Wenn $\sup_{J \subset M} J = \inf_{M \subset K} M$, dann setzt man: $|M| = \sup |J| = \inf |K|$ und nennt M *Jordan-meßbar* mit *Jordan-Maß* M.

Gutberandet heißt eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn der Rand $\partial M (:= M \backslash \overset{\circ}{M})$ eine Nullmenge ist. Es gilt:

$$\int_M f(x)dx = \int_{M \backslash \partial M} f(x)dx$$

Satz von Fubini Wenn Vorraussetzungen
1. $f : \mathbb{R}^{p \times q} \to \mathbb{R}$ stetig
2. Zu jedem kompakten Intervall I gibt es eine int.-bare Funktion $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|f(x,y)| \le g_i(y) \forall x \in I \, \forall y \in \mathbb{R}$
3. $G(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| \, dy$ ist intbar über $\mathbb{R}$

erfüllt sind, gilt:

$$\int f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx \right) dy$$

Diffeomorphismus U, V seien offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. $f : U \to V$ heißt C^k-D*iffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist und f, f^{-1} der Klasse C^k(Menge der k-mal stetig diffb. Funktionen) sind.

3 Regelfunktionen

Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn in jedem $\overrightarrow{x}_\epsilon I$ die Grenzwerte $f(x-0)$und $f(x+0)$ existieren. Eine Regelfunktion hat maximal abzählbar viele Unstetigkeitsstellen bzw. Sprungstellen. $R(I)$: Menge alller Regelfunktionen $f : I \to \mathbb{R}$

Integral über Regelfunktionen kommt später.

4 Koordinatentransformationen

meßbar ist jede Fläche, die von einer stückweise glatten sich nicht selbst schneidenden Kurve berandet ist.

Transformationssatz Seien $V \subseteq \mathbb{R}^3$ein beschränkter Jordan-meßbarer Bereich, $f : V \to \mathbb{R}$ stetig auf V, $\overrightarrow{o} = (u, v, w)$ krummlinige räumliche Koordinaten und V' ein beschränkter meßbarer Bereich in V. Wird mittels der Transformation $T : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{o})$, $o \in V'$mit $T \in C^{(1)}(V')$ und $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0 \forall\, (u, v, w) \in V'$ sowie nichtverschwindenden Grenzwert dieser Funktionaldeterminante auf dem Rand von V' der Bereich V' eineindeutig auf V abgebildet, so gilt:

$$\int_V f(x, y, z) d\tau = \int_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, z)} \right| d\tau$$

Dabei bedeutet $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y,z)}\right|$ den Betrag der Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation T.

Allgemeiner Transformationssatz Sei $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ Diffeomorphismus, $F : V \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(T(x)) * det(T'(x)) dx$$

Transformation Kartesisch Zylinderkoordinaten Kugelkoordinaten

$$\int\int_K 1\, dx\, dy\, dz = \int\int_K r\, dr\, d\phi\, dz = \int\int_K r\, sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$$

5 Wegintegrale

Weg ist eine stetige Funktion $\gamma : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Spur oder Kurve heißt die Bildmenge des Weges

regulärer (glatter) Weg falls γ stetig diffbar und $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$. Hierbei heißt $T(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|_2}$ *Tangenteneinheitsvektor* zum Parameterwert t

Umparametrisierung Weg $\gamma : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ heißt *Umparamtrisierung von* $\gamma : I \to \mathbb{R}$, wenn es eine bijektive stetig diffbare Funktion $\sigma : I \to \tilde{I}$ mit $\dot{\sigma}(t) \neq 0 \forall t \in I$ gibt so dass $\tilde{\gamma} = \gamma * \sigma^{-1}$.
σ *ist Orientierungstreu,* falls $\dot{\sigma}(t) > 0\, \forall t \in I$, sonst *orientierungsumkehrend.*
Bei Umparametrisierung bleibt die Länge des Weges erhalten.

Länge von γ Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (zumindest stückweise)stetig diffbarer Weg, so heißt

$$L(\gamma) : \quad = \quad \int_a^b \sqrt{\dot{x_1}^2 + \ldots + \dot{x_n}^2} dt = \int \left\| \dot{\gamma(t)} \right\| dt = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{r} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \text{ ($\mathcal{Z}$ Zerlegungen von [}$$

Länge von γ.

rektfizierbar heißt der Weg γ, wenn $L(\gamma) < \infty$. $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n, \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Komponentenfunktion γ_i von beschränkter Variation(Vgl. 9 auf Seite 9) sind.

Wegintegral von f Wenn $f : \gamma \to \mathbb{R}$ stetig diffbar heißt das Riemann-Stieltjes-Integral (Kapitel 9 auf Seite 9) $\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t) * \|\dot{\gamma}(t)\|_2\, dt$ *Wegintegral von f längs γ.*
Die Umparametrisierung ändert den Betrag des Wegintegrals nicht.

stückweise stetig diffbar ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, falls γ stetig und $\exists$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so dass γ auf $[t_{i-1}, t_i]$ stetig diffbar für $i = 1 \ldots n$.

6 Pfaffsche Formen

dualer Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.
Operatornorm: $\|\phi\|_2 := sup\{\phi(h) | h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_2 \leq 1\}$

Differentialform 1. Grades (*Pfaffsche Form, 1-Form*) ist eine Abbildung $\omega : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (U offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$)

Koordinatendarstellung der pfaffschen Form ω. Sei $a_i(z) := \omega(z)e_i$, also i-te Koordinate von ωim Punkt z. Dann ist $\omega(z)h = \sum_{i=1}^n h_i \omega(z) e_i = \sum_{i=1}^n a_i(z) dx_i(z) * h$ bzw. in Kurzform $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ *Koordinatendarstellung von ω.*

Wegintegral Die pfaffsche Form ω heißt *integriebar längs γ*, wenn reelle Zahl I existiert so dass gilt: Zu jedem $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass für eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\max_{k=1,\ldots,m}(I_k) < \delta$ gilt: $\|I - \sum_{k=1}^n \omega(\gamma(\tau_k))(\gamma(\tau_k) - \gamma(\tau_{k-1}))\| < \epsilon$. In diesem Fall heißt I *Wegintegral längs* γ. Es gilt:

$$I = \int_\gamma \omega \equiv \int_a^b \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m a_i(\gamma(t)) * \dot{\gamma_i}(t) dt$$

hierbei ist $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$.

Stammfunktion, Potential, Exaktheit Sei $\omega : U \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Pfaffsche Form. Eine diffbare Fkt. $f : U \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ heißt *Stammfunktion* oder *Potential* von ω. Es gilt:

$$\omega \text{ besitzt eine Stammfunktion } \Leftrightarrow \omega \text{ exakt}$$

wegunabhängige Integrierbarkeit (1) Die stetige Pfaffsche Form $U \to L(\mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R})$ (U offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) heißt in U *wegunabhängig integrierbar*, wenn für alle stückweise stetig diffbaren Wege γ_1, γ_2 in U mit dem selben Anfangspunkt z_a und dem selben Endpunkt $z_e$gilt: $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$.
Es sind äquivalent(d.h. " $\Leftrightarrow$ "):

- ω ist in U wegunabhängig integrierbar
- Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \to U$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt $\int_\gamma \omega = 0$

Falls ω exakt ist gilt: $\int_a^b \omega = f(b) - f(a)$

Gradienten-, Potentialfeld auf U heißt das Vektorfeld v, wenn es ein skalares Feld $W : U \to \mathbb{R}$ (U offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) gibt mit $v = \text{grad}\, W$.

Integrabilitätsbedingung(IB) Die Pfaffsche Form $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ *genügt der Integrabilitätssbedingung* auf U wenn sie stetig diffbar ist und folgende Bedingung erfüllt:

$$a_{k|i}(z) = a_{i|k}(z)\, \forall z \in U\ \forall i, k = 1, \ldots, n$$

Spezialfall: Sei $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbares Vektorfeld und $\omega_F = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$. *Rotation von F: rot* $F = \begin{pmatrix} F_{2|3} - F_{3|2} \\ F_{3|1} - F_{1|3} \\ F_{1|2} - F_{2|1} \end{pmatrix}$. Wegen $a_i = F_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt: ω_F genügt Integrabilitätsbedingung $\Leftrightarrow$ *rot* $F = 0$.

konvex und sternförmig Definiere $[y, z] := \{y + \tau(z - y) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ Verbindungsstrecke von y und z.
Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- ***konvex***, wenn $[y, z] \subseteq A\, \forall y, z \in A$
- ***sternförmig***, wenn Zentrum $z_0 \in A$ existiert so dass $[y, z_0] \in A\, \forall y \in A$.

Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und ω eine stetig diffbare pfaffsche Form auf U ist, gilt:

$$\omega \text{ exakt } \Leftrightarrow \omega \text{ genügt Integrabilitätsbedingung}$$

Lokale Exaktheit Die stetige Pfaffsche Form $\omega : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt *lokal exakt*, wenn zu jedem jedem $z \in U$ eine offene Umgebung $V(z) \subseteq U$ und eine Stammfunktion $f : V \to \mathbb{R}$ von ω auf V existiert, d.h. $\omega(V) = df$.

Homotopie Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = z_A$und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = z_E$ heißen *homotop in U,* wenn es eine *stetige* Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ (Homotopie) gibt mit $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)\, \forall t \in [a, b]$.

Homotopieinvarianz Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei ω eine lokal exakte Pfaffsche Form, seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ stückweise stetig diffbarer Weg mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Sind γ_0 und γ_1 homotop so gilt:

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

wegzusammenhängend ("wegweise zusammenhänngend") heißt die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es zu je zwei Punkten z_o und z_1 in U einen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gibt mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$.

Gebiet heißt U, wenn U offen und wegzusammenhängend.

nullhomotop wird geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to U$ genannt, wenn eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1]$ und ein Punkt z_γ existiert so dass $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = z_\gamma \, \forall t \in [0,1]$. *Grob:* Jeder geschlossene Weg kann auf einen Punkt zusammengezogen werden.

Einfach zusammenhängend heißt die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn U wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg nullmonotop ist.

Wegunabhängige Integrierbarkeit (2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend, sei ω lokal exakte Pfaffsche Form auf U. Dann ist ω auf U wegunabhängig integrierbar.

7 Oberflächenintegrale

Regularitätsbedingung Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und gutberandet(d.h. ∂B hat Jordan-Maß 0), sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Obermenge von B und $\phi : G \to \mathbb{R}^3$. Es sei die folgende *Regularitätsbedingung* erfüllt:

1. ϕ auf B stetig partiell diffbar.
2. ϕ ist auf B injektiv und ϕ^{-1} stetig.
3. $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \neq 0 \, \forall (u,v)^T \in B$

Dann heißt ϕ *reguläre Fläche* mit der *Spur* $S := \phi(B)$.

Flächeninhalt der regulären Fläche $S = \phi(B)$ ist

$$A(s) = \int_B \|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)\|_2 d(u,v)$$

Statt $\phi(u,v)$ auch $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in B.$

skalares und vektorielles Oberflächenelement Für reguläre Fläche $S : \underline{x}(u,v)$ heißt die formale Größe $dS := \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du\, dv$ *skalares Oberflächenelement.* Die Größe $(\underline{x}_u \times \underline{x}_v)\, du\, dv = \underline{n}\, dS$ heißt *vektorielles Oberflächenelement.* Hierbei $\underline{n}(u,v) = \frac{(\underline{x}_u \times \underline{x}_v)}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}$ *Normaleneinheitsvektor.*

8 Uneigentliche Integrale

Uneigentliches Integral(unbeschr. Funktion)

Falls f in $(a,b]$ definiert, in $[a+\eta,b]\,\forall\eta : 0<\eta<b-a$ R-intbar und $\lim_{\eta\to 0+0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx = A$, dann setze $\int_a^b f(x)dx := A$.

Falls f in $[a,b)$ definiert, in $[a,b-\eta]\,\forall\eta : 0<\eta<b-a$ R-intbar und $\lim_{\eta\to 0+0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx = A$, dann setze $\int_a^b f(x)dx := A$.

Falls f in $[a,c)\cup(c,b]$ definiert, in $[a,c-\eta],[c+\eta,b]$ für alle $\eta : 0<,\eta<\min\{c-a,b-c\}$ R-intbar und außerdem gilt: $\lim_{\eta\to 0+0}\int_a^{c-\eta} f(x)dx = C_1$ und $\lim_{\eta\to 0+0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)dx = C_2$, dann setze $\int_a^b f(x)dx := C_1 + C_2$.

Die so definierten Integrale heißen *uneigentliche Integrale.* Existieren diese Grenzwerte, so sagt man auch: die uneigentlichen Integrale *konvergieren.* Falls $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert, nennt man $\int_a^b f(x)dx$ *absolut konvergent.*

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale Für f,g liege einer der Fälle 1-3 der vorigen Definition vor. Ferner sei $|f(x)|\leq g(x)\,\forall x\in D(f)=D(g)$. Wenn $\int_a^b g(x)dx$ konvergiert, dann konvergiert $\int_a^b f(x)dx$ absolut.

Cauchyscher Hauptwert für unbeschränkte Funktionen Sei f auf $[a,c)\cup(c,b]$ definiert und auf jedem abgeschlossenem Teilintervall R-intbar. Falls

$$\lim_{\eta\to 0+0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)dx\right] = D$$

existiert, so definiert man

$$D = (H)\int_a^b f(x)dx = v.p.\int_a^b f(x)dx$$

und nennt *D: Cauchyscher Hauptwert (valeur principale)* des uneigentlichen Integrals, also $(H)\int_{-a}^{a}\frac{1}{x}dx = 0$.

Cauchyscher Hauptwert für unbeschränkten Integrationsintervall Sei $D(f)=\mathbb{R}$, f in jedem kompaktem oder abgeschlossenem Intervall R-intbar. Der *Cauchysche Hauptwert* ist

$$(H)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{\eta\to\infty}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Uneigentliches Integral(unbeschr. Definitionsbereich) Sei f in jedem kompaktem Intervall aus $D(f)$ R-intbar (d.h. lokal R-intbar).

Falls $D(f) = [a, \infty)$ und $\lim_{\rho\to\infty} \int_a^\rho f(x)dx = A$, dann setze $\int_a^\infty f(x)dx := A$

Falls $D(f) = (-\infty, a]$ und $\lim_{\rho\to-\infty} \int_\rho^a f(x)dx = B$, dann setze $\int_{-\infty}^a f(x)dx := B$

Falls $D(f) = \mathbb{R}$, $\lim_{\rho\to\infty} \int_a^\rho f(x)dx = C_1$, und $\lim_{\rho\to-\infty} \int_\rho^a f(x)dx = C_2 (\forall a \in \mathbb{R})$, dann setze $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := C_1 + C_2$ (es reicht, ein $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten).

Man sagt dann die uneigentlichen Integrale *konvergieren.* Wenn die jeweiligen Integrale von $|f|$ konvergieren, heißen die uneigentlichen Integrale *absolut konvergent.*

9 Riemann-Stieltjes-Integral

Riemann-Stieltjes-Integral Seien f, g auf $[a, b]$ definiert, reell, $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ Zerlegung, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]; 1 \leq k \leq n$ ein System von Zwischenpunkten. Unter der *Riemann-Stieltjes-Summe* (RS-Summe) von f bzgl. g zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und den Zwischenpunkten $\xi = (\xi_k)$ versteht man

$$\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

f heißt über $[a, b]$ *R-inbar bzgl. g*, falls für jede Zerlegungsnullfolge (Zerlegungsfeinheit$\to 0$) und beliebiges Zwischenpunktsystem der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{f,g}(\mathcal{Z}_n)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Riemann-Stieltjes-Integral* (RS-Integral) von f bzgl. g:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f\,dg$$

Bemerkungen:

- Wenn $g(x) = x \Rightarrow$ gewöhnliches Riemann-Integral.
- Wenn $g(x) = c \Rightarrow$natürlich jedes f bzgl. g intbar.

Rechenregeln für RS-Integrale

- Linearität bzgl. f und g:
  $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg$
  $\int_a^b f\, d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f\, dg_1 + c_2 \int_a^b f\, dg_2$
- Wenn $a < c < b \Rightarrow \int_a^b + \int_c^b = \int_a^b$

- *partielle Integration:* Wenn f bzgl. g intbar, dann auch g bzgl. f intbar, und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x) * g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$$

- *Überführung eines RS-Integrals in ein gewöhnliches Riemann-Integral:* Sei $f \in R(a,b), g \in C^1(a,b)$ (d.h. g stetig diffbar). Dann existiert $\int_a^b f\,dg$ und es gilt: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx$
Umgekehrt: Wenn $f \in R(a,b), h$ stetig, dann lässt sich $\int_a^b f(x)h(x)dx$ als RS-Integral $\int_a^b f(x)dg(x)$ darstellen mit : $g(x) = \int_a^x h(t)dt$

Fundamentalungleichung für RS-Integrale Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|\sigma_{f,g}(\mathcal{Z})| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|g(x_k) - g(x_{k-1}| \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) * \sum_{k=1}^{n} \left|g(x_k) - g(x_{k-1)}\right|
\end{aligned}$$

Funktion von beschränkter Variation auf $[a,b]$ heißt die Funktion g, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ gilt:

$$V(g,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M \leq \infty$$

Man nennt $V_a^b(g) := \sup_{\mathcal{Z}} V(g,\mathcal{Z})$ die *totale Variation von g auf* $[a,b]$.
Es gilt:

f von beschränkter Variation $\Leftrightarrow f = g_1 - g_2,\ g_1, g_2$ monoton.

Wenn f auf $[a,b]$ beschränkt und g von beschränkter Variation auf $[a,b]$, dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq sup\,|f(x)| * V_a^b(g)$$

falls das linke Integral existiert.

Existenzsatz für RS-Integral Wenn f stetig und g von beschränkter Variation auf $[a,b]$ oder umgekehrt, dann existiert das RS-Integral $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Mittelwertsätze für RS-Integrale

- Existiert das RS-Integral von f bzgl. g auf $[a,b]$, dann existiert ein μ mit $\inf f \leq \mu \leq \sup f$ mit $\int_a^b f\,dg = \mu\,[g(b)-g(a)] = \mu \int_a^b dg$
- ist f monoton und g stetig auf $[a,b]$ dann existiert $c \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f\,dg \quad = \quad f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg$$

Dreiecksungleichung für Integrale Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$