



2. Übung

1. Gegeben seien die Potentialfunktionen

(a)

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

(b)

$$V(x, y, z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

($k, c > 0$, konstant)

Berechnen Sie jeweils die Komponenten der zugehörigen Kraft, indem Sie die folgenden *partiellen Ableitungen* bilden:

$$F_x = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}.$$

2. *Krummlinige Koordinaten* u, v, w werden i.a. durch ihren Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z definiert; damit wird der Ortsvektor \vec{r} eine Funktion der u, v, w :

$$\vec{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\vec{e}_x + y(u, v, w)\vec{e}_y + z(u, v, w)\vec{e}_z \equiv \sum_{k=1}^3 x_k(u, v, w)\vec{e}_k.$$

Eine *Koordinatenlinie* entsteht, wenn sich nur eine der krummlinigen Koordinaten ändert und die anderen beiden festgehalten werden. (Die u -Linie entsteht also, wenn sich nur u ändert, v und w aber konstant gehalten werden.) Die zu den krummlinigen Koordinaten gehörenden *Basisvektoren* ($\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$) werden allgemein als die *Tangenteneinheitsvektoren an die entsprechende Koordinatenlinie* definiert, also:

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial u} \right|}, \quad \vec{e}_v = \frac{\frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial v} \right|}, \quad \vec{e}_w = \frac{\frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial w} \right|}.$$

Diskutieren Sie die Koordinatenlinien, berechnen Sie die Basisvektoren gemäss der angegebenen Vorschrift und stellen Sie den Ortsvektor in der neuen Basis dar

(a) für Kugelkoordinaten: r, ϑ, φ

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

(b) für Zylinderkoordinaten: ρ, φ, z

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Zerlegen Sie für (a) und (b) die Ableitungen der Basisvektoren bzgl. aller Koordinaten nach diesen Basisvektoren. Prüfen Sie in welcher Reihenfolge die Basisvektoren ein Rechtssystem bilden.

- *(c) Ausgehend von $\vec{r} = r\vec{e}_r$, berechnen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten. Dabei ist zu beachten, dass die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren in Kugelkoordinaten benötigt werden.
3. Die beiden Zeiger einer Uhr stehen genau um 12 Uhr übereinander. Wann und wie oft geschieht das ebenfalls?