Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. G. Soff	**Theoretische Mechanik SS 04**	

5. Übung

1. Ein Teilchen bewegt sich unter der Wirkung der Kraft $F(x) = -kx + \alpha x^2$ $(k, \alpha > 0)$ entlang der x-Achse.

   (a) Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_o muss das Teilchen bei $x = 0$ starten, damit es *nicht* wieder zurückkehrt?

   (b) Diskutieren Sie die möglichen Bewegungen in diesem Kraftfeld.

2. Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential $V(x) = \dfrac{V_o}{\cosh^2(x/a)}$; $(a, V_0$ - const) .

   (a) Welche Bewegungstypen treten hierbei in Abhängigkeit von der Energie E und vom Vorzeichen von V_o auf? Wo befindet sich das Teilchen im Gleichgewicht?

   (b) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Periodendauer T von der Energie E für Schwingungen mit *beliebiger* Amplitude um die stabile Gleichgewichtslage.
   Hinweis: Anfangssubstitution $u = \sinh(x/a)$; $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$.

   *(c) Für den Fall des stabilen Gleichgewichts berechne man die Frequenz *kleiner* Schwingungen um die Ruhelage, indem man das Potential um die Gleichgewichtslage in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Glied entwickelt und mit dem harmonischen Oszillator vergleicht.

3. Für welche a und n sind in dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a\,\dfrac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ *stabile* Kreisbahnen möglich?

4. (a) Man beweise, dass für die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Zentralkraftpotential $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{\vec{p}\times\vec{L}}{m\alpha} + \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

   eine *Erhaltungsgrösse* ist.

   (b) Indem man $\vec{\Lambda}$ skalar mit $\vec{r}$ multipliziert ($\sphericalangle(\vec{\Lambda},\vec{r}) = \varphi$), bestimme man die Bahnkurve $r(\varphi)$. Welche Bedeutung haben demnach Betrag und Richtung von $\vec{\Lambda}$?