Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. S. Kobe

Theoretische Mechanik SS 04

11. Übung

1. Finden Sie mit Hilfe des Variations-Prinzips die Form eines Drahtes (Kurve $z(x)$) auf dem ein reibungsfrei gleitender Massenpunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = mg\vec{e}_z$ am *schnellsten* von $P_1 = (x_1, 0)$ nach $P_2 = (x_2, z_2)$ gelangt. Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null.
   Hinweise: *Das zu variierende Funktional lautet* $G = \int_{t_1}^{t_2} dt$. *Bringen Sie die zugehörige* EULER-*Gleichung in die Form*
   $$\frac{d}{dx} z(1 + z'^2) = 0 \quad \text{bzw.} \quad dx = \sqrt{\frac{z}{a - z}} dz, \tag{1}$$
   wobei a *die Integrationskonstante der ersten Gleichung bezeichnet. Lösen Sie die zweite Gleichung durch Integration mit Hilfe des Ansatzes* $z = a \sin^2 \varphi$.

2. Zeigen Sie die Invarianz der LAGRANGEschen-Bewegungsgleichungen unter folgender Transformation der LAGRANGE-Funktion (mechanische Eichtransformation)
   $$\mathcal{L}(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^*(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\Omega(q_1, .., q_f, t) \tag{2}$$
   (mit einer beliebigen Funktion $\Omega = \Omega(q_1, .., q_f, t)$)
   (a) durch explizite Berechnung der LAGRANGE-Gleichungen für $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^*$,
   (b) mit Hilfe des HAMILTON-Prinzips der kleinsten Wirkung.
   (c) Betrachten Sie nun die Änderung der LAGRANGE-Funktion eines freien Teilchens unter GALILEI-Transformation und deren Konsequenz für die Bewegungsgleichung des Teilchens.

3. Ein Teilchen der Masse m kann sich im homogenen Schwerefeld der Erde ($\vec{g} = -g\vec{e}_z$) nur auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R bewegen. Reibung werde vernachlässigt.
   (a) Wie lauten die HAMILTON-Funktion und die kanonischen Gleichungen unter Verwendung von Kugelkoordinaten? Welche Erhaltungssätze gelten?
   (b) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit sich das Teilchen auf einer *horizontalen* Kreisbahn bewegt?
   *(c) Wie gross ist die Frequenz *kleiner* Schwingungen um die Kreisbahn aus (b)?

(bitte wenden)

Hausaufgabe (Abgabe in Vorlesung am 25.6.)
(Bitte versehen Sie Ihre Hausaufgabe mit Matrikelnummer & Name!)

Finden Sie die LAGRANGE-Funktion für das ebene Doppelpendel (an der Masse m_1 eines Pendels der Länge l ist ein weiteres Pendel der Länge l mit der Masse m_2 befestigt). Führen Sie in der LAGRANGE-Funktion eine *harmonische Näherung* für kleine Auslenkungen aus der stabilen Gleichgewichtslage durch (berücksichtigen Sie Terme bis zur quadratischen Ordnung). Wie lauten dann die LAGRANGE-Gleichungen des Systems? Finden Sie deren allgemeine Lösung und bestimmen Sie die Normalkoordinaten des Systems.