Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. S. Kobe

Theoretische Mechanik SS 04

12. Übung

1. (a) Zeigen Sie dass für den *Drehimpuls* $L_i = \epsilon_{ijk}\, q_j p_k$ (q_j seien *kartesische* Koordinaten) die folgenden *Vertauschungsrelationen* gelten:
$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk}\, p_k\,; \quad \{L_i, q_j\} = \epsilon_{ijk}\, q_k\,; \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}\, L_k\,; \quad \{L_i, \vec{L}^{\,2}\} = 0\,;$
(wobei die Summenkonvention benutzt wird, nach der über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren ist; ϵ_{ijk} ist der *vollständig antisymmetrische Tensor 3.Stufe* (LEVI-CIVITA-Tensor), der definiert ist durch: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$, $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$, $\epsilon_{ijk} = 0$ sonst).
Nutzen Sie dabei nur die *algebraischen* Eigenschaften der POISSON-Klammern sowie die *elementaren* POISSON-Klammern zwischen den *kanonisch konjugierten* Variablen ($\{q_k, q_l\} = 0\,;\ \{p_k, p_l\} = 0\,;\ \{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$)
Hinweis: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

   (b) Ein Teilchen sei durch die HAMILTONfunktion $H = T + V(\vec{r})$ beschrieben. Berechnen Sie die totale Zeitableitung des Drehimpulses $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ mit Hilfe der POISSON-Klammern. Wann ist $\vec{L}$ eine Erhaltungsgrösse?

2. (a) Wie kann man prüfen, ob eine gegebene Transformation auf neue Koordinaten $Q_i = Q_i(q_1, .., q_f, p_1, .., p_f, t)$ und Impulse $P_i = P_i(q_1, .., q_f, p_1, .., p_f, t)$ *kanonisch* ist?

   (b) Die HAMILTON-Funktion des harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2.$$

Als *Erzeugende* einer kanonischen Transformation diene

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \cot Q.$$

Finden Sie die zugehörigen Transformationsformeln der Koordinaten und Impulse und die transformierte HAMILTON-Funktion. Lösen Sie die resultierenden HAMILTONschen Bewegungsgleichungen.
(*) Berechnen Sie die elementare POISSON-Klammer $\{P, Q\}$.

   (c) In Erweiterung zur aus der Vorlesung bekannten *Erzeugenden* $F_1 = F_1(q_1, .., q_f, Q_1, .., Q_f, t)$ lassen sich durch LEGENDRE-Transformationen drei weitere Typen von Erzeugenden finden

(bitte wenden)

$$
\begin{aligned}
F_2 &= F_2(q_1,..,q_f,P_1,..,P_f,t) = F_1 - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j, \\
F_3 &= F_3(p_1,..,p_f,Q_1,..,Q_f,t) = F_1 - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j, \\
F_4 &= F_4(p_1,..,p_f,P_1,..,P_f,t) = F_1 - \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j \right).
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie für den Fall von F_2, dass durch Kenntnis der *Erzeugenden*, der Koordinaten $q_1,..,q_f$, und der Impulse $p_1,..,p_f$ die Transformation als auch die transformierte HAMILTON-Funktion vollständig bestimmt sind.

*(d) Überzeugen Sie sich mit Hilfe des HAMILTONschen Wirkungsprinzips, dass F_2 tatsächlich eine kanonische Transformation vermittelt.

**(e) Wiederholen Sie Aufgaben (c) und (d) für F_4.

Hausaufgabe (Abgabe in Vorlesung am 2.7.)
(Bitte versehen Sie Ihre Hausaufgabe mit Matrikelnummer & Name!)

Gegeben sei ein System aus einem Teilchen der Masse M und n Teilchen der Masse m deren potentielle Energie lediglich vom Abstand der Teilchen zueinander abhängt. Finden Sie die zugehörige LAGRANGE- und HAMILTON-Funktion im Schwerpunktsystem.

Benutzen Sie als generalisierte Koordinaten die Abstandsvektoren der n Teilchen zur Masse M. Warum genügen diese n Vektoren zur Beschreibung des Systems?