



Lösung zur 2. Übung

1. (a) $V(x, y, z) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$

$$F_x = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = -kx$$

$$F_y = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = -ky$$

$$F_z = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2) = -kz$$

Das kann als Vektor zusammengefasst werden: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Es handelt sich also um die Kraft eines 3-dimensionalen harmonischen Oszillators (elastische Bindung an den Ursprung).

(b) $V(x, y, z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Das kann als Vektor zusammengefasst werden:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -c \frac{\vec{r}}{(\vec{r}^2)^{3/2}} = -c \frac{\vec{r}}{r^3} = -c \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

mit $r = |\vec{r}|$ (Betrag des Ortsvektors) und $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ (Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors). Die Kraft zeigt stets radial auf den Ursprung zu und ist dem Quadrat des Abstandes vom Ursprung umgekehrt proportional.

Physikalische Beispiele: Gravitationskraft (zwischen zwei Massen) und Coulombkraft (zwischen zwei Ladungen).

2. *Vorbemerkung:* Um die Darstellung des Ortsvektors relativ zu den neuen Basisvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ (die in den hier vorliegenden Beispielen orthogonal sind) zu gewinnen, muss man die Komponenten von \vec{r} relativ zu dieser Basis ermitteln:

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u + (\vec{r} \cdot \vec{e}_v) \vec{e}_v + (\vec{r} \cdot \vec{e}_w) \vec{e}_w, \quad (1)$$

wobei man die Vektoren in den runden Klammern relativ zum kartesischen Basissystem darstellt.

(a) **Kugelkoordinaten:** $\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + r \cos \vartheta \vec{e}_z$

Die r -Linien sind vom Ursprung ausgehende Strahlen; die ϑ -Linien bilden Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt und die φ -Linien stellen Kreise um die z -Achse dar.

$$\frac{\partial \vec{r}(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z = \vec{e}_r$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

$$\frac{\partial \vec{r}(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - r \sin \vartheta \vec{e}_z$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist r .)

$$\frac{\partial \vec{r}(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_y$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist $r \sin \vartheta$.)

Damit erhalten wir für die **Basisvektoren der Kugelkoordinaten:**

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{aligned}$$

Wie man sich leicht anhand der Anschauung überzeugt, bilden die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ ein *Rechtssystem*. Man kann das auch mit Hilfe des Kreuzproduktes prüfen; es gilt tatsächlich: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$ (und zyklische Vertauschung der Vektoren).

Die Darstellung des Ortsvektors ist sofort ersichtlich: $\boxed{\vec{r} = r \vec{e}_r}$

Für die Ableitungen der Basisvektoren erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} &= \vec{e}_\vartheta & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= -\vec{e}_r & \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi} &= \cos \vartheta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \vartheta} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\sin \vartheta \vec{e}_r - \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta \end{aligned}$$

Hinweis: Nach Bilden der jeweiligen Ableitung erhält man deren Darstellung relativ zur neuen Basis analog zur *Vorbemerkung*, wobei \vec{r} durch die jeweilige Ableitung zu ersetzen ist.

(b) **Zylinderkoordinaten:** $\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \vec{e}_x + \rho \sin \varphi \vec{e}_y + z \vec{e}_z$

Die ρ -Linien sind an der z -Achse beginnende Strahlen senkrecht zur z -Achse; die φ -Linien bilden Kreise um die z -Achse und die z -Linien sind Parallelen zur z -Achse.

$$\frac{\partial \vec{r}(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y = \vec{e}_\rho$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

$$\frac{\partial \vec{r}(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \vec{e}_x + \rho \cos \varphi \vec{e}_y$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist ρ .)

$$\frac{\partial \vec{r}(\rho, \varphi, z)}{\partial z} = \vec{e}_z$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

Damit erhalten wir für die **Basisvektoren der Zylinderkoordinaten**:

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z}$$

Wie man sich wieder leicht anhand der Anschauung überzeugt, bilden die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ein *Rechtssystem*. Prüfung mit dem Kreuzprodukt ergibt: $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ (und zyklische Vertauschung).

Die Darstellung des Ortsvektors ist ersichtlich: $\boxed{\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z}$

Für die Ableitungen der Basisvektoren erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \vec{e}_\varphi & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\vec{e}_\rho & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

***(c) Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten:**

Ausgangspunkt für die Geschwindigkeitsberechnung ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r.$$

Man erkennt also, dass die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren benötigt werden, die mit Hilfe des totalen Differentials berechnet werden können,

$$d\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \varphi} d\varphi,$$

wobei j hier für $j = r, \vartheta, \varphi$ steht. Somit erhält man

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} = \dot{\vec{e}}_j = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

Angewendet auf die Basisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ findet man folgende Ergebnisse:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \vec{e}_r + \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_r - \cos \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\vartheta.$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich damit zu

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Die Beschleunigung erhält man auf analoge Weise:

$$\begin{aligned}\vec{a} = & \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\dot{\vartheta}\dot{\vec{e}}_\vartheta + \dot{r}\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \\ & r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

und nach Einsetzen ermittelt man folgendes Endergebnis

$$\vec{a} = b_r\vec{e}_r + b_\vartheta\vec{e}_\vartheta + b_\varphi\vec{e}_\varphi$$

mit

$$\begin{aligned}b_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 \\ b_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 \\ b_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}).\end{aligned}$$

Bemerkung: Setzt man $\vartheta = \pi/2$, hat man sofort die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten der Ebene gefunden:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

und

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

3. Beide Zeiger führen eine *gleichförmige Rotation* aus:

$$\text{grosser Zeiger: } \varphi_1 = \frac{2\pi}{T_1}t, \quad T_1 = 1\text{h}$$

$$\text{kleiner Zeiger: } \varphi_2 = \frac{2\pi}{T_2}t, \quad T_2 = 12\text{h}$$

Übereinanderstehen der Zeiger zur Zeit t_n : $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$, ($n = 1, 2, \dots$)

$$\Rightarrow \frac{n}{t_n} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \Rightarrow \boxed{t_n = n \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = n \frac{12}{11} \text{h} = n (1\text{h } 5\text{min } 27, 27 \dots \text{s})}$$

Es gibt also 11 verschiedene Möglichkeiten für übereinanderstehende Zeiger.