Lösung zur 4. Übung

1. (a)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)$$

Da x, y, z unabhängige Variablen sind, verschwinden alle Ableitungen. Also ist

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{r} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{r} = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{r} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

Jede der Ableitungen ergibt eins. Also ist:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{r} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{r} = 3}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \circ \vec{r} \right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen also, dass das Ergebnis gleich dem Einheitstensor $\hat{I}$ ist:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \circ \vec{r} = \hat{I}}$$

(c) Wenn wir den Nablaoerator auf gegebene Funktionen von $\vec{r}$ anwenden, ist es vorteilhaft, möglichst nicht auf die Komponentendarstellung zurückzugreifen, sondern die Ableitungen mit Hilfe der *Regeln* der *Differential-* **und** *Vektorrechnung* auf die drei in (a) und (b) hergeleiteten Grundregeln zurückzuführen. Das wollen wir nun an vier Beispielen üben:

- $$\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{r} = \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \circ \vec{r} \right) = \vec{a} \cdot \hat{I} = \vec{a}$$

- $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \circ \vec{r} \right) \cdot \vec{a} = \hat{I} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

- $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r}\cdot\vec{r})$$

  Hier haben wir die *Kettenregel* benutzt. Im weiteren muss von der *Produktregel* Gebrauch gemacht werden. Dabei entsteht ein Bezeichnungsproblem: üblicherweise steht der zu differenzierende Ausdruck hinter dem Differentialoperator und alles, was nicht zu differenzieren ist, steht davor; diese Konvention tritt manchmal in Konflikt mit den Regeln der Vektorrechnung. Um klarzustellen, auf welchen Ausdruck der Nablaoperator wirkt, wird dieser Ausdruck mit einem $\downarrow$ gekennzeichnet; alles was dann hinter einem Nabla steht und keinen $\downarrow$ trägt, ist bei der Differentiation konstant zu halten. Produktregel und Regel (b) ergeben:

  $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\overset{\downarrow}{\vec{r}}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}}) = 2\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\overset{\downarrow}{\vec{r}}\cdot\vec{r}) = 2\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\circ\overset{\downarrow}{\vec{r}}\right)\cdot\vec{r} = 2\hat{I}\cdot\vec{r} = 2\vec{r}$$

  Damit lautet das Ergebnis:

  $$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r}$$

  Der *Gradient des Betrages des Ortsvektors* ist also gleich dem *Einheitsvektor* in $\vec{r}$-Richtung.

- Mit dem soeben erhaltenen Resultat sowie mit der Kettenregel wird:

  $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

2. $V(\vec{r})$ existiert, falls $\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}) = 0$. Mit dem Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt und den Regeln aus Aufg.1. folgt:

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\times\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{r})\right] = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\times\left[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right] = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{r}\cdot\vec{a})\right]}_{=\vec{a}}\times\vec{b} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\times\vec{r}\right)}_{=0}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}\times\vec{b} \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} = \alpha\,\vec{a}\,; \quad \vec{a},\vec{b}\ \text{parallel!}$$

Die Potentialkraft lautet also: $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha\,\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{r})$.

Das zugehörige Potential errechnet sich zu

$$V(\vec{r}) = -\alpha\int_0^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}\,'\cdot[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{r}\,')] = \alpha\int_0^{\vec{r}} [\mathrm{d}(\vec{a}\times\vec{r}\,')]\cdot(\vec{a}\times\vec{r}\,') = \frac{\alpha}{2}\int_0^{\vec{r}} \mathrm{d}\left[(\vec{a}\times\vec{r}\,')^2\right]$$

Hierbei haben wir beim zweiten Gleicheitszeichen $\cdot$ und $\times$ im Spatprodukt vertauscht und beachtet, dass $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist; danach wurde die Produktregel *rückwärts* angewandt.

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{2}(\vec{a}\times\vec{r})^2$$

Die Äquipotentialflächen sind Zylindermäntel um $\vec{a}$ als Achse. Die Kraft steht auf ihnen senkrecht; sie ist also senkrecht zu $\vec{a}$ und zeigt (für $\alpha > 0$) radial auf die $\vec{a}$-Achse zu.

Bem.: Man kann $V(\vec{r})$ natürlich auch direkt als Linienintegral berechnen; dazu setzen wir $\vec{a} = a\vec{e}_z$ und stellen $\vec{F}$ in Zylinderkoordinaten dar: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{e}_\rho \alpha a^2 \rho$ (mit $\rho = r\sin\vartheta$, $\vartheta = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{e}_z)$). Wir integrieren zunächst entlang der z'-Achse, wo $\vec{F}$ verschwindet, von 0 bis $z' = z$; danach in der Ebene $z' = z$ über ρ' von 0 bis $\rho = r\sin\vartheta$:

$$V(\vec{r}) = \alpha a^2 \int_0^\rho \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}' \cdot \vec{e}_\rho}_{\mathrm{d}\rho'} \rho' = \frac{\alpha}{2} a^2 \rho^2 = \frac{\alpha}{2} a^2 r^2 \sin^2\vartheta = \frac{\alpha}{2} (\vec{a} \times \vec{r})^2$$

3. (a) Für $\mathrm{d}\vec{r}$ erhalten wir aus der gegebenen Parameterdarstellung des Integrationsweges (Ellipse mit Halbachsen $2c$ und $3c$, die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, beginnend im Punkt $2c$ auf der x-Achse):

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}q}\,\mathrm{d}q = (-2c\,\sin q\,\vec{e}_x + 3c\,\cos q\,\vec{e}_y)\,\mathrm{d}q\,.$$

Der Integrand ist an den Punkten des Weges zu nehmen, d.h. man muss für x und y die Ausdrücke aus der Parameterdarstellung einsetzen.

$$\begin{aligned} W_C &= \oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}q\,(-2c\,\sin q\,\vec{e}_x + 3c\,\cos q\,\vec{e}_y)\,\cdot \\ &\qquad \cdot [a(6c\,\cos q - 3c\,\sin q)\vec{e}_x + b(6c\sin q - 2c\,\cos q)\vec{e}_y] \\ &= c^2\left[(18b - 12a)\int_0^{2\pi} \mathrm{d}q\,\sin q\cos q + 6(a+b)\int_0^{2\pi} \mathrm{d}q\,\sin^2 q - 6b\int_0^{2\pi} \mathrm{d}q\right] \end{aligned}$$

(Dabei wurde $\cos^2 q = 1 - \sin^2 q$ verwendet.). Die einzelnen Integrale ergeben:

$$\int \mathrm{d}q\,\sin q\cos q = -\frac{1}{4}\,\cos 2q\,; \qquad \int \mathrm{d}q\,\sin^2 q = \frac{q}{2} - \frac{1}{4}\,\sin 2q$$

Damit lautet das Ergebnis

$$\boxed{W_C = \oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 6\pi c^2(a-b)}$$

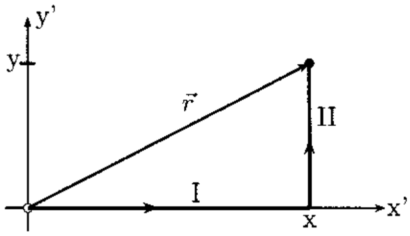
(b) Die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ besitzt ein Potential, wenn ihre Rotation verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(3x-y) & b(2y-x) & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z(a-b) \stackrel{!}{=} 0$$

Ein Potential existiert also, wenn $\boxed{b = a}$ gilt; dann verschwindet das Linienintegral entlang *jedes* geschlossenen Weges, z.B. auch entlang C aus (a). Die Kraft lautet:

$$\vec{F}(\vec{r}) = a[(3x-y)\vec{e}_x + (2y-x)\vec{e}_y]$$

Das Potential $V(\vec{r})$ kann durch Integration entlang eines *beliebigen* Weges von einem (willkürlich wählbaren) Bezugspunkt zum aktuellen Aufpunkt $\vec{r}$ berechnet werden; als Bezugspunkt wählen wir den Ursprung und integrieren zunächst entlang der x'-Achse bis x (Weg I) und dann parallel zur y-Achse bei festem $x' = x$ bis y (Weg II):



$$\begin{aligned}
\mathrm{I}:\quad & \vec{r}\,'_I = x'\vec{e}_x\,;\ x' = 0\ldots x \\
& \mathrm{d}\vec{r}\,'_I = \mathrm{d}x'\,\vec{e}_x \\
\mathrm{II}:\quad & \vec{r}\,'_{II} = x\vec{e}_x + y'\vec{e}_y\,;\ y' = 0\ldots y \\
& \mathrm{d}\vec{r}\,'_{II} = \mathrm{d}y'\,\vec{e}_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -\int_0^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = -3a\int_0^x \mathrm{d}x'\,x' - a\int_0^y \mathrm{d}y'\,(2y'-x) \\
&= -3a\,\frac{x'^2}{2}\bigg|_0^x - a\,(y'^2 - xy')\Big|_0^y = -\frac{3}{2}\,ax^2 - a(y^2 - xy)
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = -a\left(\tfrac{3}{2}\,x^2 + y^2 - xy\right)}$$

Mit $\vec{F} = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ erhalten wir den obigen Ausdruck für $\vec{F}$ zurück.