



Lösung zur 8. Übung

1. (a) Damit das Teilchen in Σ' ruht ($\vec{v}' = 0$) muss gelten

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_o) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_o)$$

(Wegen $\vec{v}' = 0$ tritt *keine* CORIOLISKRAFT auf!) Damit das Teilchen im rotierenden Bezugssystem in Ruhe bleibt, muss also ständig eine Kraft \vec{F} die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_o)$ kompensieren (z.B. Haftreibung, Zwangskraft, ...).

- (b) Es gilt: $m\ddot{\vec{r}} = 0$, $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}(0) = 0$, $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) = \vec{r}_o$. Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten ist: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \stackrel{!}{=} 0$, also gilt:

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{d'}{dt} \vec{r}(t) = -\vec{\omega} \times \vec{r}(t)}; \quad \vec{r} = \vec{r}_o \quad (1)$$

Um die Ableitung auf der linken Seite (zeitliche Änderung, gesehen durch den mitrotierenden Beobachter, d.h. relativ zur rotierenden Basis) einfach bilden zu können, müssen wir \vec{r} nach der rotierenden Basis \vec{e}'_m zerlegen $\vec{r} = \sum_m x'_m \vec{e}'_m$ (und dort nur die x'_m differenzieren); auf der rechten Seite zerlegen wir \vec{r} ebenfalls bzgl. der rotierenden Basis.

$$\frac{d'}{dt} \sum_m x'_m \vec{e}'_m = -\vec{\omega} \times \sum_n x'_n \vec{e}'_n \Rightarrow \boxed{\sum_m \frac{dx'_m}{dt} \vec{e}'_m = \sum_n (-\vec{\omega}) \times \vec{e}'_n x'_n}; \quad (2)$$

mit der Anfangsbedingung $x'_m(0) = x_{om}$. Die Bewegungsgleichung im rotierenden System liefert dann mit (1):

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -m\vec{\omega} \times \vec{v}',$$

in Übereinstimmung mit (1).

(2) beschreibt eine *Kreisbewegung* mit der Winkelgeschwindigkeit $-\vec{\omega}$ (siehe 3. Übung, Aufg. 3).

(* *Zur Transformation zwischen den Bezugssystemen*)

Bei Anwendungen benötigt man den direkten Zusammenhang der Vektorkomponenten in beiden Systemen. Der Zusammenhang zwischen den Komponenten *eines* Vektors relativ zu verschiedenen Basissystemen mit der Transformationsmatrix α lautet:

$$\vec{r} = \sum_m x'_m \vec{e}'_m = \sum_k x_k \vec{e}_k \quad \Rightarrow \quad x'_m = \vec{e}'_m \cdot \vec{r} = \sum_k \alpha_{mk} x_k, \quad \text{mit } \alpha_{mk} = \vec{e}'_m \cdot \vec{e}_k; \quad \boxed{x' = \alpha x} \quad (3)$$

O.B.d.A. wählen wir $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ und $\vec{e}'_k(t=0) = \vec{e}_k$. Wie man sich geometrisch klarmacht, gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= +\cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= -\sin \omega t \vec{e}_1 + \cos \omega t \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 &= +\vec{e}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}'_m = \sum_k \alpha_{mk} \vec{e}_k \quad (4)$$

Liegt also in unserem Beispiel das Teilchen im Inertialsystem bei $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)^T$, so findet es der mitrotierende Beobachter bei

$$\begin{pmatrix} x'_o \\ y'_o \\ z'_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \cos \omega t + y_o \sin \omega t \\ -x_o \sin \omega t + y_o \cos \omega t \\ z_o \end{pmatrix}$$

Das Teilchen beschreibt also für den mitrotierenden Beobachter in der Ebene $z' = z_o$ einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ und dem Radius $x'^2 + y'^2 = x_o^2 + y_o^2$.

Bem.: Die Transformation (4) der Basis kann auch analytisch aus der Gleichung für die starre Rotation eines Vektors \vec{e}'_m hergeleitet werden. Mit (4) und der Konstanz der Basis \vec{e}_k wird

$$\dot{\vec{e}}'_m = \vec{\omega} \times \vec{e}'_m \Rightarrow \sum_k \dot{\alpha}_{mk} \vec{e}_k = \sum_l \vec{\omega} \times \vec{e}_l \alpha_{ml} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \alpha_{mj} = \omega \sum_l \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_j) \alpha_{ml}} \quad (5)$$

(Um die letzte Relation zu erhalten, wurde die mittlere Gleichung mit \vec{e}_j multipliziert und die Orthogonalität der Basis ausgenutzt, sowie die Faktoren im Spatprodukt geeignet umgeordnet und $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ eingesetzt.) (5) stellt ein DGL-System für die Transformationsmatrix α_{mj} dar, das mit der *Anfangsbedingung*

$$\alpha_{mj}(0) = \vec{e}'_m(0) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_j = \delta_{mj} \quad (6)$$

zu lösen ist. Ausgeschrieben lautet (5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_{m1} + \omega \alpha_{m2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \alpha_{m2} - \omega \alpha_{m1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \alpha_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung führt sofort mit (6) auf die Lösung für die dritte Spalte von α

$$\alpha_{m3}(t) = \alpha_{m3}(0) = \delta_{m3} \Rightarrow \alpha_{13} = 0, \alpha_{23} = 0, \alpha_{33} = 1.$$

Die anderen beiden Gleichungen lassen sich mit der in Aufg.3 vorgestellten Methode behandeln; dazu multiplizieren wir die zweite Gleichung mit der imaginären Einheit i , addieren sie zur ersten Gleichung hinzu, definieren die *komplexe* Grösse $\mathcal{A}_m = \alpha_{m1} + i\alpha_{m2}$ und erhalten so eine homogene DGL mit konstanten Koeffizienten für \mathcal{A}_m , die sich sofort lösen lässt:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}_m - i\omega \mathcal{A}_m = 0 \Rightarrow \mathcal{A}_m = C e^{i\omega t}, \quad \text{mit (6) wird } \mathcal{A}_m = (\delta_{m1} + i\delta_{m2}) e^{i\omega t}$$

Hieraus erhalten wir sofort (durch Bildung von Real- und Imaginärteil) die erste und zweite Spalte von α , so dass sich tatsächlich (4) ergibt.

2. Wir müssen beachten, dass das Laborsystem rotiert *und* sich ausserdem sein *Ursprung* O' *beschleunigt* bewegt (Ortsvektor \vec{R} vom Ursprung O des Inertialsystems im Erdmittelpunkt zum Ursprung O' des Laborsystems auf der Erdoberfläche), also ist $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$; die Bewegungsgleichung in Σ' lautet also

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m\vec{g}_o - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Hierbei soll \vec{g}_o die *reine* Schwerebeschleunigung sein. Grössenordnungsmässig gilt für das Verhältnis des vorletzten Terms zum letzten $\frac{r'\omega}{v} \ll 1$; man beachte, dass

$\omega = 2\pi/1\text{Tag} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ ist. Man kann also den Zentrifugalterm gegen den CORIOLIS-TERM für alle Labordimensionen vernachlässigen. \vec{R} bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einem Kreis; also $\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, woraus $\ddot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ folgt. Die durch $\ddot{\vec{R}}$ hervorgerufene Kraft wirkt auf jedes Massenelement der Erde selbst \Rightarrow Verformung der Erde so, dass sich die Erdoberfläche *senkrecht* zur resultierenden Kraft $m(\vec{g}_o - \ddot{\vec{R}})$ einstellt \Rightarrow Abplattung an den Polen. Wir führen die *lokale Schwerebeschleunigung* $\boxed{\vec{g} \equiv \vec{g}_o - \ddot{\vec{R}}}$ ein, die senkrecht auf der (realen) Erdoberfläche steht und erhalten so die angegebene Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} + \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' \quad \text{q.e.d.} \quad (7)$$

3. Gemäss (7) lautet die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator (Eigenfrequenz ω_o) in der $(x-y)$ -Ebene des rotierenden System (Striche an den Koordinaten zur Vereinfachung weggelassen!)

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_o^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = 0; \quad \vec{r}(0) = (a, 0), \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0} \quad (8)$$

\rightarrow *Modell eines Pendels* (Länge l) für *kleine* Ausschläge $a \ll l$, denn für das Pendel (Ruhelage im Ursprung) haben wir:

$$V(\vec{r}) = mgz; \quad \text{Nebenbedingung: } x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2 \Rightarrow z = l - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$$

Entwickeln wir nun die Wurzel für $x, y \leq a \ll l$, so entsteht

$$z = l \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right] \approx l \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right) \right] = \frac{x^2 + y^2}{2l}$$

und damit lautet das Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega_o^2 (x^2 + y^2); \quad \omega_o^2 = \frac{g}{l}; \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -m\omega_o^2 \vec{r} \quad \text{q.e.d.}$$

Bem.: Die in Aufg.4. gemachte Vernachlässigung des Zentrifugalterms ist hier gerechtfertigt, denn: $\omega a \ll v \sim \omega_o a$, d.h. $\omega \ll \omega_o = \sqrt{g/l}$, da die Schwingungsdauer des Pendels natürlich sehr viel kleiner als ein Tag ist. Wir schreiben nun die Bewegungsgleichung (8) in Komponenten, multiplizieren die zweite Gleichung mit der imaginären Einheit i , addieren sie zur ersten hinzu und führen die *komplexe* Grösse $\mathcal{Z} = x + iy$ ein (ist \mathcal{Z} bekannt, so folgt $x = \Re \mathcal{Z}$ und $y = \Im \mathcal{Z}$).

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} = -\omega_o^2 x + 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_o^2 y - 2\omega_z \dot{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{Z} = x + iy} \quad \ddot{\mathcal{Z}} + 2i\omega_z \dot{\mathcal{Z}} + \omega_o^2 \mathcal{Z} = 0;$$

mit der bezüglich der Erdoberfläche vertikalen Komponente der Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega_z = \omega \sin \psi$ (man beachte: ω_z ist positiv auf der Nordhalbkugel, aber negativ auf der Südhalbkugel). Die entstandene DGL für \mathcal{Z} ist linear, homogen, mit konstanten Koeffizienten; wir können sie also mit dem Exponentialansatz behandeln.

$$\mathcal{Z} = C e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 2i\omega_z \lambda + \omega_o^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = i \left[-\omega_z \pm \sqrt{\omega_o^2 + \omega_z^2} \right] \equiv i(-\omega_z \pm \Omega)$$

Mit den beiden komplexen Integrationskonstanten C_1, C_2 erhalten wir die *allgemeine* Lösung der DGL

$$\mathcal{Z} = e^{-i\omega_z t} \left(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t} \right)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen (8):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}(0) = a &= C_1 + C_2 \\ \dot{\mathcal{Z}}(0) = 0 &= -i\omega_z(C_1 + C_2) + i\Omega(C_1 - C_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{1/2} = \frac{a}{2} \left(1 \pm \frac{\omega_z}{\Omega} \right)$$

Die spezielle Lösung zu unseren Anfangsbedingungen lautet demnach

$$\mathcal{Z}(t) = e^{-i\omega_z t} a \left(\cos \Omega t + i \frac{\omega_z}{\Omega} \sin \Omega t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = a \left[+ \cos \omega_z t \cos \Omega t + \left(\frac{\omega_z}{\Omega} \right) \sin \omega_z t \sin \Omega t \right] \\ y = a \left[- \sin \omega_z t \cos \Omega t + \left(\frac{\omega_z}{\Omega} \right) \cos \omega_z t \sin \Omega t \right] \end{cases}$$

Diskussion der Grössenordnungen der verschiedenen Terme:

$$\Omega = \sqrt{\omega_o^2 + \omega_z^2} = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_o} \right)^2} \approx \omega_o \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_z}{\omega_o} \right)^2 \right] \approx \omega_o;$$

der dann in Ω vernachlässigte Term ist dann für ein Pendel mit $l = 20$ m in der Grössenordnung von 10^{-8} . Die *führenden* Terme in unserer Lösung sind also:

$$\mathcal{Z}(t) \approx e^{-i\omega_z t} a \cos \omega_o t \Rightarrow \begin{cases} x \approx a \cos \omega_z t \cos \omega_o t \\ y \approx -a \sin \omega_z t \cos \omega_o t \end{cases}$$

(*Bem.:* VORSICHT bei Vernachlässigungen im Argument einer Winkelfunktion; dort muss gewährleistet sein, dass auch das Produkt der vernachlässigten Terme mit noch in Betracht kommenden grossen Zeiten (hier: ≈ 1 Tag) *klein* gegen 2π bleibt, was in unserem Fall gewährleistet ist (vernachlässigter Term: $\frac{1}{2}\omega_o \left(\frac{\omega_z}{\omega_o} \right)^2 \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{1}{2} \frac{\omega_z}{\omega_o} 2\pi \sim 2\pi 10^{-4}$.)

Der Einfluss der Erdrotation besteht also in einer Drehung der Pendelbahn um die Vertikale mit $|\omega_z|$ im
entgegen Uhrzeigersinn auf der Nord-
Süd- Halbkugel.

Bemerkungen:

(i) In den Umkehrpunkten ($t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$, $n = 1, 2, \dots$) sind $\dot{x}(t_n) = \dot{y}(t_n) = 0$, d.h. die Bahn hat dort *Spitzen*.

(ii) Drehung der Bahnebene nach m Schwingungsperioden ($t_m = 2m\pi/\Omega$):

$$\delta\varphi(t_m) = \omega_z t_m = 2\pi m \frac{\omega_z}{\Omega} \approx 2\pi m \frac{\omega_z}{\omega_o}$$

Zur graphischen Darstellung der Bahn nutzen wir *dimensionslosen* Grössen:

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a, \quad \mu = \omega_z/\Omega, \quad \tau = \Omega t$$

und erhalten so:

$$\mathcal{Z}(\tau)/a = e^{-i\mu\tau} (\cos \tau + i \mu \sin \mu\tau) \Rightarrow \begin{cases} \xi(\tau) = \cos \mu\tau \cos \tau + \mu \sin \mu\tau \sin \tau \\ \eta(\tau) = -\sin \mu\tau \cos \tau + \mu \cos \mu\tau \sin \tau \end{cases}$$

Im abgebildeten Beispiel wurde $\mu = 0.1$ gewählt, um den charakteristischen Bahnverlauf mit den Spitzen an den Umkehrpunkten zu verdeutlichen. Der reale Wert liegt für ein Pendel mit $l \approx 20$ m bei $\mu \approx 10^{-4}$.

