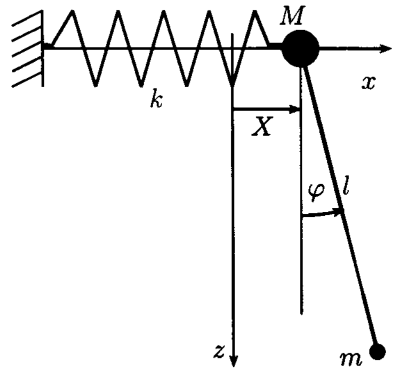
Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. S. Kobe

Theoretische Mechanik SS 04

Lösung zur 10. Übung



1. (a) Das System hat $f = 2$ Freiheitsgrade; als *angepasste verallgemeinerte Koordinaten* wählen wir die Auslenkung X der Masse M aus ihrer Ruhelage, in die wir auch den Nullpunkt der x-Koordinate legen und den Auslenkwinkel φ des Pendels aus der Vertikalen; die Nebenbedingungen sind dann für alle Werte, die X und φ annehmen können, erfüllt. Das System ist konservativ; die LAGRANGE-Funktion ist also durch $\mathcal{L} = T - V$ gegeben. Wir müssen nun die kinetische und potentielle Energie in diesen Koordinaten darstellen.
Da T und V meist in kartesischen Koordinaten eine einfache Form haben, schreibt man sich am besten die Transformationsformeln zwischen den kartesischen und den angepassten Koordinaten auf; für m gilt:

$$x = X + l\sin\varphi\,, \qquad \dot{x} = \dot{X} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$z = l\cos\varphi\,, \qquad \dot{z} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) \\ V &= -mgz + \frac{k}{2}X^2 = -mgl\cos\varphi + \frac{k}{2}X^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(X,\varphi,\dot{X},\dot{\varphi}) = T - V = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + mgl\cos\varphi - \frac{k}{2}X^2}$$

(b) Die LAGRANGE-Gleichungen ergeben sich mit $\mathcal{L}$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned} (M+m)\ddot{X} + ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) &= -kX \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{X}\cos\varphi &= -g\sin\varphi \end{aligned}}$$

Das ist ein System gekoppelter nichtlinearer DGLn.

*(c) *Linearisierung* für $\varphi \ll 1$:
Mit TAYLORentwicklung bis zum linearen Term in φ wird: $\cos\varphi \approx 1$ und $\sin\varphi \approx \varphi$. Ferner gilt mit $\varphi \ll 1$ auch $\varphi^2 \ll 1$ und damit ist $\ddot{\varphi} \gg \dot{\varphi}^2\varphi$, denn

mit der charakteristischen Zeit τ für die Pendelschwingung gilt: $\ddot{\varphi} \sim \varphi/\tau^2$ und $\dot{\varphi} \sim \varphi/\tau$. Die *linearisierten* Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{X} + kX + ml\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{X} + l\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Mit den speziellen Werten $M = 3m$, $m = kl/4g$ und $g/l \equiv \omega_o^2$ wird schliesslich:

$$\begin{aligned} 4\ddot{X} + 4\omega_o^2 X + l\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{X} + l\ddot{\varphi} + \omega_o^2(l\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Das ist ein *lineares, homogenes* DGLsystem 2.Ordnung, welches wir lösen können; es beschreibt die gekoppelten linearen Schwingungen von X und $l\varphi$. Wir suchen die Lösung mit einem Ansatz, bei dem *beide* Koordinaten mit *derselben* Frequenz ω_λ, aber mit unterschiedlichen Amplituden schwingen; dieser Ansatz überführt das DGLsystem in ein homogenes *algebraisches* Gleichungssystem für die Amplituden.

Ansatz: $\vec{q} \equiv \begin{pmatrix} X \\ l\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\lambda X} \\ a_{\lambda\varphi} \end{pmatrix} e^{i\omega_\lambda t} \Rightarrow \begin{aligned} 4\left(\omega_o^2 - \omega_\lambda^2\right) a_{\lambda X} \qquad -\omega_\lambda^2 a_{\lambda\varphi} &= 0 \\ -\,\omega_\lambda^2 a_{\lambda X} + (\omega_o^2 - \omega_\lambda^2) a_{\lambda\varphi} &= 0 \end{aligned}$

Eine nichttriviale Lösung für $\vec{a}$ existiert nur, falls die Koeffizientendeterminante verschwindet:

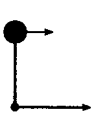
$$4\left(\omega_o^2 - \omega_\lambda^2\right)^2 = \omega_\lambda^4 \;\Rightarrow\; \omega_\lambda^2 = \pm 2\left(\omega_o^2 - \omega_\lambda^2\right) \;\Rightarrow\; \omega_\lambda^2 = \frac{2}{2 \pm 1}\,\omega_o^2$$

$$\boxed{\omega_I^2 = \frac{2g}{3l}}$$

Einsetzen in das Gleichungssystem liefert das Amplitudenverhältnis:

$$-\frac{2}{3}\omega_o^2 a_{IX} + \frac{1}{3}\omega_o^2 a_{I\varphi} = 0$$

$$\boxed{\frac{a_{I\varphi}}{a_{IX}} = 2}$$



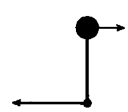
symmetrische Eigenschwingung

$$\boxed{\omega_{II}^2 = \frac{2g}{l}}$$

Einsetzen in das Gleichungssystem liefert das Amplitudenverhältnis:

$$-\,2\omega_o^2 a_{II\,X} - \omega_o^2 a_{II\,\varphi} = 0$$

$$\boxed{\frac{a_{II\,\varphi}}{a_{II\,X}} = -2}$$



antisymmetrische Eigenschwingung

Die *allgemeine* Lösung ist eine *Linearkombination* der beiden Fundamentallösungen (für die komplexen $a_{\lambda X}$ setzen wir $a_{\lambda X} = c_\lambda e^{i\alpha_\lambda}$, mit reellen c_λ und α_λ, und gehen zum Realteil über):

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \;\; c_I\cos(\omega_I t + \alpha_I) \;+\;\; c_{II}\cos(\omega_{II} t + \alpha_{II}) \\ l\varphi &= 2c_I\cos(\omega_I t + \alpha_I) \;-\; 2c_{II}\cos(\omega_{II} t + \alpha_{II}) \end{aligned}}$$

mit den vier Integrationskonstanten $c_I, \alpha_I, c_{II}, \alpha_{II}$.

2. Für die Bewegung des 3-atomigen Moleküls entlang der x-Achse lauten kinetische und potentielle Energie in den Koordinaten $x_k (k = 1, 2, 3)$:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2; \quad V = \frac{k}{2}\left[(x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2\right].$$

Damit ist die LAGRANGEfunktion in den Koordinaten $q_k := x_k - x_k^o$:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{k}{2}\left[(q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2\right]; \quad \text{bzw. mit}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}; \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}(a_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m - b_{lm}q_l q_m)} \tag{1}$$

Hierbei wurde die *Summenkonvention* benutzt, d.h. über gleiche Indizes ist von 1-3 zu summieren. Die LAGRANGEgleichungen lauten dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{kl}\,\ddot{q}_l + b_{kl}\,q_l = 0$$

Dies stellt ein System gekoppelter linearer homogener Dgln 2.Ordnung dar, das durch den Ansatz der *Fundamentalschwingungen* gelöst wird, bei denen *alle* Teilchen mit der *gleichen* Frequenz ω_λ schwingen:

$$q_k = C_{k\lambda}\,e^{i\omega_\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(b_{kl} - \omega_\lambda^2\,a_{kl})\,C_{l\lambda} = 0}, \quad \text{bzw.: } (\hat{b} - \omega_\lambda^2\,\hat{a})\,\vec{C}_\lambda = 0. \tag{2}$$

Damit ist das System von Dgln in ein System homogener *algebraischer* Glgn. 2.Grades überführt worden, das als (verallgemeinertes) Eigenwertproblem interpretiert werden kann (Eigenwerte ω_λ^2; Eigenvektoren $\vec{C}_\lambda$ mit den Komponenten $C_{l\lambda}$, die die Matrix der Eigenvektoren $\hat{C}$ bilden). Ein solches Gleichungssystem besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

Lösbarkeitsbed: $\det(\hat{b} - \omega_\lambda^2\,\hat{a}) = 0 \Rightarrow (k - m\omega_\lambda^2)^2(2k - M\omega_\lambda^2) - 2k^2(k - m\omega_\lambda^2) = 0$

$$\Rightarrow \quad \omega_\lambda^2(k - m\omega_\lambda^2)[mM\omega_\lambda^2 - k(M + 2m)] = 0.$$

Damit lauten die Frequenzen der drei Fundamentalschwingungen:

$$\boxed{\omega_I^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega_{II}^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right); \quad \omega_{III}^2 = 0}$$

Die zugehörigen drei Eigenvektoren erhält man, indem man das jeweilige ω_λ in (2) einsetzt und eine der drei Gleichungen streicht (durch die verschwindende Determinante sind nur noch zwei der drei Gleichungen linear unabhängig voneinander!); daraus folgen also die Verhältnisse der Komponenten der Eigenvektoren:

$$C_{2I} = 0, \; \frac{C_{1I}}{C_{3I}} = -1; \quad \frac{C_{1II}}{C_{2II}} = -\frac{M}{2m} = \frac{C_{3II}}{C_{2II}}; \quad C_{1III} = C_{2III} = C_{3III}$$

Will man die *Normalkoordinaten* bestimmen, muss man die Eigenvektoren noch normieren gemäss

$$C_{k\lambda}a_{kl}C_{l\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \text{ bzw. in Matrixform } \boxed{\hat{C}^T\,\hat{a}\,\hat{C} = \hat{E}}. \tag{3}$$

((3)stellt eine verallgemeinerte Orthonormalitätsrelation der Eigenvektoren dar). Die normierten Eigenvektoren lauten dann in unserem Fall (unter den Eigenvektoren sind qualitativ die zu diesen Fundamentalschwingungen gehörigen Bewegungen der Massen gezeichnet):

$$\vec{C}_I = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{C}_{II} = \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{C}_{III} = \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man aus (3) ersieht, transformiert die Matrix $\hat{C}$ der normierten Eigenvektoren die Matrix $\hat{a}$ der kinetischen Energie auf die Einheitsmatrix $\hat{E}$. Die Matrix $\hat{b}$ der potentiellen Energie wird durch $\hat{C}$ auf Diagonalform transformiert (mit den Eigenfrequenzen ω_λ^2 in der Diagonale), denn mit (2) und (3) wird:

$$C_{k\lambda} b_{kl} C_{l\lambda'} = C_{k\lambda} a_{kl} C_{l\lambda'} \omega_{\lambda'}^2 = \boxed{\omega_\lambda^2 \, \delta_{\lambda\lambda'} = (\hat{C}^T \hat{b} \hat{C})_{\lambda\lambda'}} \tag{4}$$

Die allgemeine Lösung unseres gekoppelten *linearen* Dglsystems ist eine *Linearkombination* der drei Fundamentalschwingungen (wobei natürlich nur der Realteil der komplexen Lösung physikalisch relevant ist):

$$q_k = \sum_{\lambda=1}^{3} C_{k\lambda} A_\lambda e^{i\omega_\lambda t} \equiv C_{k\lambda} Q_\lambda \quad \to \quad \sum_{\lambda=1}^{3} |A_\lambda| \, C_{k\lambda} \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda) \tag{5}$$

Hierbei wurde für die komplexen Integrationskonstanten $A_\lambda = |A_\lambda| e^{i\delta_\lambda}$ geschrieben, mit reellen $|A_\lambda|$ und δ_λ; die allgemeine Lösung enthält also 6 reelle Integrationskonstanten, wie es sein muss. Die oben eingeführten Q_λ sind die *Normalkoordinaten*. Sie ergeben sich durch die Umkehrung von (5) unter Beachtung von (3) zu

$$Q_\lambda = C_{l\lambda} a_{lk} q_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{Q} = \hat{C}^T \hat{a} \, \vec{q}. \tag{6}$$

In unserem Fall erhalten wir für die Q_λ

$$\begin{pmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2m}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} & -\sqrt{\frac{2m}{M(M+2m)}} & \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} \\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_I &= \sqrt{\tfrac{m}{2}}\,(- \; q_1 \; + \; q_3) \\ \Rightarrow \quad Q_{II} &= \sqrt{\tfrac{M}{1+\frac{M}{2m}}}\,(+ \; \tfrac{1}{2} q_1 \; - \; q_2 \; + \; \tfrac{1}{2} q_3) \\ Q_{III} &= \tfrac{1}{\sqrt{M+2m}}\,(+ \; m q_1 \; + \; M q_2 \; + \; m q_3) \end{aligned} \tag{7}$$

Ersetzt man in der LAGRANGEfunktion (1) die q_l gemäss (5) durch die Q_λ und beachtet (3) und (4), so ergibt sich

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{3} (\dot{Q}_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) = \frac{1}{2} \left[(\dot{Q}_I^2 - \omega_I^2 Q_I^2) + (\dot{Q}_{II}^2 - \omega_{II}^2 Q_{II}^2) + (\dot{Q}_{III}^2 - \omega_{III}^2 Q_{III}^2) \right],$$

was ein System *ungekoppelter* Oszillatoren darstellt; die Normalkoordinaten entkoppeln also unser Bewegungsproblem; die Bewegungsgleichungen für die Q_λ lauten also

$$\ddot{Q}_\lambda + \omega_\lambda^2 Q_\lambda = 0\,.$$

Der spezielle Fall $\omega_{III} = 0$ führt auf $\ddot{Q}_{III} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{III} = A + v_0 t$, also eine gleichförmige Bewegung. Wie man aus (7) sieht, entspricht die dritte Normalkoordinate der (hier trivialen) Schwerpunktbewegung, für die *keine* äussere Kraft existiert. Diese Schwerpunktbewegung hätte man von vornherein abspalten und nur die beiden Schwingungsfreiheitsgrade explizit behandeln können, indem man

- entweder die Schwerpunktkoordinate und geeignete Differenzkoordinaten einführt:

$$X = \frac{m(x_1+x_3)+Mx_2}{M+2m}\,; \qquad r_1 = x_2 - x_1 - a\,; \quad r_2 = x_2 - x_3 - a$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{M+2m}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m(m+M)(\dot{r}_1^2+\dot{r}_2^2) - 2m^2\dot{r}_1\dot{r}_2}{M+2m} - \frac{k}{2}(r_1^2+r_2^2)$$

$$\text{also:} \quad \hat{a} = \frac{1}{M+2m}\begin{pmatrix} m(M+m) & -m^2 \\ -m^2 & m(M+m)\end{pmatrix}\,; \quad \hat{b} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

- oder die Bewegung gleich im Schwerpunktsystem beschreibt, d.h. die Zusatzforderung $m(x_1+x_3) + Mx_2 = 0$ stellt; mit der Wahl $x_3^\circ = -x_1^\circ = a\,;\ x_2^\circ = 0$ folgt dann $q_2 = -\frac{m}{M}(q_1+q_3)$, d.h. es gibt nur noch *zwei* unabhängige Koordinaten q_1, q_3.

Die Normalkoordinaten repräsentieren eine *kollektive* Bewegung der Teilchen mit *gleicher* Frequenz. Eine dieser Normal- oder Fundamentalschwingungen wird als Lösung realisiert für *spezielle* Ab, so dass in (5) *ein* $A_\lambda \neq 0$ und die beiden anderen $A_{\lambda'} \equiv 0$ sind; das lässt sich z.B. bei verschwindenden Anfangsgeschwingigkeiten durch Anfangsauslenkungen gemäss der jeweiligen $\vec{C}_\lambda$ erreichen.

Abschliessend sei die allgemeine Lösung (5) unseres Problems explizit ausgeschrieben, wobei wir anstelle der $|A_\lambda|$ die neuen Integrationskonstanten d_λ, v einführen, die die jeweiligen Normierungskonstanten der $\vec{C}_\lambda$ mit enthalten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = d_I \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t + \delta_I) + d_{II}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_{II} t + \delta_{II}) + (d_{III} + vt)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um nur diese Lösung anzugeben, muss man natürlich *nicht* die Normalkoordinaten Q_λ berechnen und braucht auch die Eigenvektoren $\vec{C}_\lambda$ *nicht* zu normieren.

*3. Zu zeigen: mit $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\left[U(\vec{r}(t),t) - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}(t),t)\right]$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B})$$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r}(t),t)\right] = m\ddot{\vec{r}} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} &= -q\,\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + q\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right) \\
\Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} &= q\left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right) - \left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\vec{A}\right] \\
m\ddot{\vec{r}} &= q\left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{r}}\times\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\times\vec{A}\right)\right] \\
m\ddot{\vec{r}} &= q\left(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$