



Lösung zur 12. Übung

1. (a)

$$\text{POISSONklammer: } \{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

Bem: In der Vorlesung wurde die Poissonklammer mit dem umgekehrten Vorzeichen definiert, was dazu führt, dass die Elementarklammer zwischen  $q_k$  und  $p_l$  lautet  $\{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$ , im Gegensatz zu Gleichung (6).

Algebraische Eigenschaften der POISSONklammern (deren Beweis ist elementar möglich):

$$F = \text{const} \Rightarrow \{F, G\} = 0 \quad \forall G \quad (1)$$

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad \text{Antikommutativität} \quad (2)$$

$$\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha \{F_1, G\} + \beta \{F_2, G\} \quad \text{Distributivität} \quad (3)$$

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2 \quad \text{Produktregel} \quad (4)$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad \text{JACOBIidentität} \quad (5)$$

Bem.: Zusammen mit den elementaren Klammern zwischen den kanonisch konjugierten Variablen

$$\{q_k, q_l\} = 0; \quad \{p_k, p_l\} = 0; \quad \{q_k, p_l\} = \delta_{kl} \quad (6)$$

kann man (1) - (5) als Axiome für ein abstraktes Klammersymbol als Paarverknüpfung in einem linearen Raum auffassen. Es gibt dann neben den POISSONklammern weitere verschiedene Realisierungen für dieses Klammersymbol; z.B. der Kommutator zwischen quadratischen Matrizen oder Operatoren (siehe Quantenmechanik); die Rechenregeln (1) - (5) gelten unabhängig von der Realisierung. Alle Ergebnisse, die wir nur unter Zuhilfenahme dieser Regeln herleiten, gelten also auch für andere Klammersymbole.

$$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ikl} \{q_k p_l, p_j\} = \epsilon_{ikl} [q_k \{p_l, p_j\} + \{q_k, p_j\} p_l] = \epsilon_{ijl} p_l \quad (7)$$

Im ersten Gleichheitszeichen wurde (3), im zweiten (13), im letzten (6) verwendet.

Es ist also z.B.:  $\{L_x, p_y\} = p_z$ ;  $\{L_y, p_x\} = -p_z$ , usw.

$$\{L_i, q_j\} = \epsilon_{ikl} \{q_k p_l, q_j\} = \epsilon_{ikl} [q_k \{p_l, q_j\} + \{q_k, q_j\} p_l] = \epsilon_{ijk} q_k \quad (8)$$

Also ist z.B.:  $\{L_x, q_z\} = -q_y$ , usw.

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ikl} \{q_k p_l, L_j\} = \epsilon_{ikl} [q_k \{p_l, L_j\} + \{q_k, L_j\} p_l]$$

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= -\epsilon_{ikl} (\epsilon_{jlm} q_k p_m + \epsilon_{jkm} q_m p_l) \\
&= (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) q_k p_m - (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) q_m p_l \\
&= q_i p_j - p_i q_j = \epsilon_{ijk} L_k
\end{aligned} \tag{9}$$

Hier wurden im dritten Gleichheitszeichen (7) und (8), im vierten Indexumordnung und der *Hinweis* (aus der Aufgabenstellung) und im letzten der *Hinweis* 'rückwärts' benutzt. Speziell ist:  $\{L_x, L_y\} = L_z$ .

Die POISSONklammern zwischen Drehimpulskomponenten verschwinden also *nicht*.

$$\begin{aligned}
\{L_i, \vec{L}^2\} &= \{L_i, L_j L_j\} = \{L_i, L_j\} L_j + L_j \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k L_j + \epsilon_{ijk} L_j L_k \\
\{L_i, \vec{L}^2\} &= \epsilon_{ijk} L_k L_j + \epsilon_{ikj} L_k L_j = \epsilon_{ijk} L_k L_j - \epsilon_{ijk} L_k L_j = 0
\end{aligned}$$

(In der zweiten Zeile wurden beim ersten Gleichheitszeichen die Summationsindizes im zweiten Term umbenannt:  $j \rightarrow k$ ,  $k \rightarrow j$ ; im zweiten Gleichheitszeichen haben wir  $\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}$  benutzt.)

Die POISSONklammer zwischen *jeder* Drehimpulskomponente und dem Quadrat des Drehimpulses verschwindet also.

- (b) Die totale Zeitableitung einer physikalischen Grösse  $\vec{L}$  ergibt sich im Formalismus der POISSONklammern aus:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \{\vec{L}, H\} + \frac{\partial \vec{L}}{\partial t}$$

Der Drehimpuls hängt nur über  $q_i(t)$  und  $p_k(t)$  von der Zeit ab; er weist *keine explizite* Zeitabhängigkeit auf; also verschwindet der letzte Term. Die Zeitableitung von  $\vec{L}$  ist somit allein durch die POISSONklammer von  $\vec{L}$  mit  $H$  gegeben.

Betrachten wir nun die Komponente  $L_i$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= \{L_i, H\} = \frac{1}{2m} \{L_i, p_k p_k\} + \{L_i, V(q)\} \\
&= \frac{1}{2m} (p_k \{L_i, p_k\} + \{L_i, p_k\} p_k) + \epsilon_{ikl} \{q_k p_l, V(q)\}
\end{aligned}$$

Hier steht  $V(q)$  für  $V(q_1, q_2, q_3)$ . Setzen wir in den beiden ersten Termen der zweiten Zeile (7) ein, so sehen wir, dass diese Terme Null ergeben. Den letzten Term formen wir mit der *Produktregel* um, beachten, dass die Klammer von  $q_k$  mit einer beliebigen Funktion der  $q_l$  stets verschwindet und benutzen die Definition der POISSONklammern:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= \frac{1}{2m} (\epsilon_{ikl} p_k p_l + \epsilon_{ikl} p_l p_k) + \epsilon_{ikl} (q_k \{p_l, V(q)\} + \{q_k, V(q)\} p_l) \\
\frac{dL_i}{dt} &= \epsilon_{ikl} q_k \left( \frac{\partial p_l}{\partial q_m} \frac{\partial V(q)}{\partial p_m} - \frac{\partial p_l}{\partial p_m} \frac{\partial V(q)}{\partial q_m} \right) = -\epsilon_{ikl} q_k \frac{\partial V(q)}{\partial q_l} = \epsilon_{ikl} q_k F_l
\end{aligned}$$

Hier wurde der Zusammenhang zwischen Kraft  $\vec{F}$  und Potential  $V(\vec{r})$  benutzt. Der letzte Ausdruck stellt die  $i$ -Komponente des Vektorproduktes des Ortsvektors  $\vec{r}$  mit der Kraft  $\vec{F}$  dar.

$$\frac{dL_i}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F})_i; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also durch das Drehmoment der Kraft gegeben.

2. (a) Eine Transformation von alten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  und  $p_1, \dots, p_f$  auf neue  $Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f$  ist *kanonisch*, wenn eine *Erzeugende*  $F_1(q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  existiert für die gilt:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (10)$$

Hierbei bezeichnet  $H^* = H^*(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  die transformierte HAMILTON-Funktion, für welche die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_i}. \quad (11)$$

$F_1(q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  verknüpft also die alten mit den neuen Variablen und bestimmt die Transformation vollständig, darüberhinaus ist durch  $F_1$  auch die neue HAMILTON-Funktion vollständig festgelegt.

- (b) Am Beispiel des harmonischen Oszillators kann man eindrucksvoll demonstrieren, wie geeignet gewählte kanonische Transformationen die Integration der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen.

Mit Gleichung (10) ergibt sich:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cot Q \quad (12)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \quad (13)$$

Die eigentlichen Transformationsformeln erhalten wir, indem wir nach  $q$  und  $p$  auflösen

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q, \\ p &= \sqrt{2Pm\omega_0} \cos Q. \end{aligned} \quad (14)$$

Da  $F_1$  nicht explizit von der Zeit abhängt folgt für die neue HAMILTON-Funktion

$$H^*(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{1}{2m} 2Pm\omega_0 \cos^2 Q + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q. \quad (15)$$

Sie nimmt also eine besonders einfache Gestalt an:

$$H^*(Q, P) = \omega_0 P, \quad (16)$$

aus der wir ablesen, dass die Koordinate  $Q$  zyklisch ist. Mithin gilt

$$P(t) = P_0 = \text{const.} \quad (17)$$

Weiterhin gilt:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P} = \omega_0, \quad (18)$$

$$Q(t) = \omega_0 t + Q_0. \quad (19)$$

Die Lösung ist vollständig, wenn wir die Gleichungen (17) und (19) in die Transformationsformeln (14) einsetzen:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0), \quad (20)$$

$$p(t) = \sqrt{2P_0 m \omega_0} \cos(\omega_0 t + Q_0). \quad (21)$$

Das ist die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators.  $Q_0$  und  $P_0$  sind dabei durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

(\*) Um die POISSONklammer

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \quad (22)$$

zu berechnen, benötigen wir die neuen Koordinaten als Funktion der alten, d.h.  $Q = Q(q, p)$  bzw.  $P = P(q, p)$ . Aus Gleichung (12) erhalten wir

$$Q = \text{arccot} \left( \frac{p}{m\omega_0 q} \right) = \arctan \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right) \quad (23)$$

Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$P = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \left( \arctan \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right) \right)} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \left( \arcsin \left( \frac{\frac{m\omega_0 q}{p}}{\sqrt{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2}} \right) \right)} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2}{\left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \left( 1 + \left( \frac{p}{m\omega_0 q} \right)^2 \right). \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m\omega_0} + \frac{1}{2} m \omega_0 q^2. \quad (28)$$

Mit  $\frac{d}{dx} \arctan x = 1/(1+x^2)$  erhalten wir für die POISSONklammer

$$\{Q, P\} = \frac{\frac{m\omega_0}{p} \left( \frac{p}{m\omega_0} \right)}{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2} - \frac{\left( -\frac{m\omega_0 q}{p^2} \right) m\omega_0 q}{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2} \quad (29)$$

$$= \frac{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2}{1 + \left( \frac{m\omega_0 q}{p} \right)^2} \quad (30)$$

$$= 1. \quad (31)$$

Die zwei verbleibenden fundamentalen POISSONklammern sind trivial  $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$ .

Bem: Allgemein kann bewiesen werden, dass eine Transformation genau dann kanonisch ist, wenn die fundamentalen POISSONklammern (s.o) erfüllt sind.

(c) Wir wissen bereits, dass eine Transformation  $(q_1, \dots, q_f) \Rightarrow (Q_1, \dots, Q_f)$  kanonisch ist, falls gilt

$$p_k \dot{q}_k - H = P_k \dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_1}{dt}, \quad (32)$$

wobei  $F_1 = F_1(q_1, \dots, q_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  die Erzeugende der Transformation bezeichnet. Über doppelt vorkommende Indizes ist wie immer zu summieren. Für das Differential von  $F_1$  gilt damit

$$dF_1 = (p_k dq_k - P_k dQ_k) + (H^* - H) dt. \quad (33)$$

Aus diesem Differential lassen sich per Koeffizientenvergleich mit

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (34)$$

die bekannten Relationen für die Transformation ableiten, siehe Gleichung (10). In Analogie dazu wollen wir nun das Differential von  $F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  betrachten. Es gilt

$$F_2 = F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} Q_k = F_1 + P_k Q_k, \quad (35)$$

$$(36)$$

und damit

$$dF_2 = dF_1 + (P_k dQ_k + Q_k dP_k) = p_k dq_k + Q_k dP_k + (H^* - H) dt. \quad (37)$$

Verglichen mit

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \quad (38)$$

erhalten wir somit

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (39)$$

Die dritte Gleichung bestätigt uns, dass die neue HAMILTON-Funktion durch die Kenntnis von  $F_2(q_1, \dots, P_1, \dots, t)$  vollständig festgelegt ist.

Sind die  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$  und  $F_2$  vorgegeben, so löst man

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = p_k(q_1, \dots, P_1, \dots, t) \quad (40)$$

nach  $P_k$  auf und erhält damit die erste Hälfte der Transformationsgleichungen

$$P_k = P_k(q_1, \dots, p_1, \dots, t). \quad (41)$$

Das setzen wir in

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k(q_1, \dots, P_1, \dots, t) \quad (42)$$

ein und erhalten dann

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, p_1, \dots, t). \quad (43)$$

Diese Überlegungen setzen natürlich voraus, das die Funktion  $F_2$  alle notwendigen Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit erfüllt. Das die neue HAMILTON-Funktion durch  $F_2$  vollständig festgelegt ist

\*(d) Um zu demonstrieren, dass auch  $F_2$  eine kanonische Transformation vermittelt, starten wir mit Gleichung (32) und drücken  $dF_1$  mittels Gleichung (37) aus

$$p_k \dot{q}_k - H = P_k \dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_1}{dt} \quad (44)$$

$$= P_k \dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt} - (P_k \dot{Q}_k + Q_k \dot{P}_k) \quad (45)$$

$$= -Q_k \dot{P}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt}. \quad (46)$$

Setzen wir den Ausdruck aus Gleichung (46) ins HAMILTONsche Wirkungsfunktional ein, so erhalten wir

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_k \dot{q}_k - H(q, p, t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -Q_k \dot{P}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt} \right) \quad (47)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -Q_k \dot{P}_k - H^* \right) + F_2(q_1(t_2), \dots, P_1(t_2), \dots, t_2) - F_2(q_1(t_1), \dots, P_1(t_1), \dots, t_1). \quad (48)$$

$$(49)$$

Statt nach  $q_1, \dots, q_f$  und  $p_1, \dots, p_f$  muss  $\mathcal{J}$  nun nach den  $Q_1, \dots, Q_f$  und  $P_1, \dots, P_f$  variiert werden. Nach Voraussetzung soll gelten,

$$0 = \delta \mathcal{J} = \delta (F_2(q_1(t_2), \dots, P_1(t_2), \dots, t_2) - F_2(q_1(t_1), \dots, P_1(t_1), \dots, t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\delta Q_k \dot{P}_k - Q_k \delta \dot{P}_k - \frac{\partial H^*}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \delta P_k \right). \quad (50)$$

Da die  $q_k(t_1), q_k(t_2)$  für die Variation fest sind, gilt

$$\delta (F_2(q_1(t_2), \dots, P_1(t_2), \dots, t_2) - F_2(q_1(t_1), \dots, P_1(t_1), \dots, t_1)) = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \delta P_k \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (51)$$

Wenn wir nun noch umformen

$$\int_{t_1}^{t_2} dt Q_k \delta \dot{P}_k = Q_k \delta P_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{Q}_k \delta P_k, \quad (52)$$

so bleibt

$$0 = \delta \mathcal{J} = \left( -Q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) \delta P_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \delta P_k \left( \dot{Q}_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \right) - \delta Q_k \left( \dot{P}_k + \frac{\partial H^*}{\partial Q_k} \right) \right). \quad (53)$$

Mit Gleichung (39) ist der erste Summand Null und wegen der Unabhängigkeit der neuen Variablen  $Q_k$  und  $P_k$  folgen dann aus Gleichung (53) die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k}. \quad (54)$$

Die durch  $F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  erzeugte Transformation ist also tatsächlich *kanonisch*.

\*\* (e) Wiederholen wir die Prozedur aus (c), so erhalten wir als totales Differential von  $F_4(p_1, \dots, P_1, \dots, t)$

$$dF_4 = Q_k dP_k - q_k dp_k + (H^* - H) dt. \quad (55)$$

Damit ergibt sich

$$Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}, \quad q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}, \quad (56)$$

und durch Invertieren und Auflösen nach  $Q_1, \dots, Q_f$  und  $P_1, \dots, P_f$  erhalten wir wieder die expliziten Transformationsformeln. Zum Beweis der Kanonizität der Transformation vermittelt durch  $F_4$  setzen wir nun

$$p_k \dot{q}_k - H = \dot{p}_k q_k + p_k \dot{q}_k - \dot{P}_k Q_k - H^* + \frac{dF_4}{dt} \quad (57)$$

in das HAMILTONSche Prinzip ein, variieren nach  $Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f$  und verifizieren damit die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen.