Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. S. Kobe	Theoretische Mechanik SS 04	

Lösung zur 13. Übung

1. Der Stab und das System Σ seien in relativer Ruhe zueinander und man misst zur Zeit $t_1 = t_2$ die Länge des Stabes durch den Abstand der beiden Endpunkte

$$l = x_2 - x_1. \tag{1}$$

Bei der Längenmessung im mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegten Bezugssystem Σ' ergibt sich für die Positionen der Endpunkte

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1)\,, \quad x_2' = \gamma(x_2 - vt_2). \tag{2}$$

Auch in Σ' müssen wir nun die Koordinaten zur gleichen Zeit ablesen, es muss also gelten $t_1' = t_2'$ und nicht etwa $t_1 = t_2$. Es gilt mithin

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right), \tag{3}$$

bzw.

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{4}$$

und damit

$$l' = x_2' - x_1' = \gamma\left[x_2 - x_1 - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Der in Σ ruhende Massstab der Länge l erschient also in Σ' um den Faktor $(1 - \beta^2)^{1/2} < 1$ verkürzt.

Nun ruhe der Massstab im System Σ', entsprechend erhalten wir nun

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt_1')\,, \quad x_2 = \gamma(x_2' + vt_2'), \tag{6}$$

und

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right) = t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right), \tag{7}$$

bzw.

$$t_2' - t_1' = -\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1'). \tag{8}$$

Damit bekommen wir

$$\tilde{l} = x_2 - x_1 = \gamma\left[x_2' - x_1' - \frac{v^2}{c^2}(x_2' - x_1')\right] = \tilde{l}'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{9}$$

und der bewegte Massstab erscheint diesmal in Σ um $(1 - \beta^2)^{1/2} < 1$ verkürzt. Entscheidend ist, dass die Längenmessung vorschreibt die Positionen der Enden *gleichzeitig* abzulesen. Das Gleichzeitigkeitskriterium ist aber für verschiedene Inertialsysteme verschieden und das überträgt sich auf die Ergebnisse der Längenmessungen.

2. Bei einer Relativgeschwindigkeit von $v = 3c/5$ ergibt sich γ zu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}. \tag{10}$$

Da sich Σ' relativ zu Σ in x-Richtung bewegt ändern die y- und z- Koordinate ihren Wert nicht:

$$y = y' = 15\,m\,, \quad z = z' = 10\,m. \tag{11}$$

Die x-Koordinate und die Zeit t im System Σ erhalten wir aus der Lorentztransformation unter Verwendung von $c = 3 \cdot 10^8\,m/s$,

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + vt') = \frac{5}{4}\left(20 + \frac{9}{5}4\right)m = 34\,m, & (12)\\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) = \frac{5}{4}\left(4 + \frac{1}{5}20\right) \cdot 10^{-8}s = 1 \cdot 10^{-7}\,s. & (13)\end{aligned}$$

3. Im relativistischen Fall gilt:

$$E_{kin}^{rel} = c^2(m - m_o)\,;\; m = \gamma m_o\,; \quad E = mc^2 = c\sqrt{\vec{p}^2 + (m_o c)^2}\,;\; \vec{p} = m\vec{v}\,; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir erweitern die Definition der relativistischen kinetischen Energie mit $c^2(m + m_o)$ und nutzen die Ausdrücke für die Gesamtenergie E

$$\begin{aligned} E_{kin}^{rel} &= c^2(m - m_o) = \frac{c^2(m-m_o)\,c^2(m+m_o)}{c^2(m+m_o)} = \frac{c^4(m^2 - m_o^2)}{c^2(m+m_o)} \\ &= \frac{c^2\left(\vec{p}^2 + (m_o c)^2\right) - m_o^2 c^4}{c^2(m+m_o)} = \frac{\vec{p}^2}{m+m_o} \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Für $v \to c$ (*ultrarelativistischer* Fall) wird: $\frac{1}{\gamma} \to 0\,;\; m_o \ll m$ und damit

$$E_{kin}^{rel} \approx \frac{\vec{p}^2}{m} = \frac{m\vec{v}\cdot\vec{p}}{m} = \vec{v}\cdot\vec{p} = pv \approx pc \qquad \text{q.e.d.}$$

Im ultrarelativistischen Fall verhält sich das Teilchen der Masse m_o also wie ein Photon mit $m_o = 0$, für das exakt gilt $E = E_{kin}^{rel} = pc$.

Bem.: Diese Relation findet z.B. Anwendung in der statistischen Physik bei der Behandlung eines *ultrarelativistischen* Gases wechselwirkungsfreier Teilchen; dieses verhält sich also wie ein Photonengas.

4. Für den Zerfall eines Teilchens (wie für jede Art von Stossprozessen) gilt die *Erhaltung des Viererimpulses*

$$P^\kappa = m_o u^\kappa = (mc, m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = const \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{p} = const\,,\; E = const}$$

Vor dem Zerfall verschwindet der Impuls; daher muss der Gesamtimpuls nach dem Zerfall auch verschwinden. Damit gilt nach dem Zerfall:

$$\textit{Impulssatz:}\;\; \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu \equiv \vec{p}\,; \qquad \textit{Energiesatz:}\;\; m_{o\pi}c^2 = c\sqrt{p_\mu^2 + (m_{o\mu}c)^2} + c|\vec{p}_\nu|$$

Man beachte, dass der relativistische Energiesatz auch für den inelastischen Stoss gilt; die inneren Anregungsenergien sind in der Ruhemasse enthalten! Für den Impuls nach dem Zerfall erhalten wir:

$$\Rightarrow \boxed{p = |\vec{p}_\mu| = |\vec{p}_\nu| = \frac{m_{o\pi}^2 - m_{o\mu}^2}{2m_{o\pi}}\, c} = \frac{(273^2 - 207^2)(m_{oe}c^2)^2}{2 \cdot 273\, m_{oe}c^2 \cdot c} = \frac{29.7}{c}\,\mathrm{MeV}$$

Die kinetischen Energien ergeben sich zu

$$\begin{aligned} E_{kin,\mu} &= E_\mu - m_{o\mu}c^2 = c\sqrt{p_\mu^2 + (m_{o\mu}c)^2} - m_{o\mu}c^2 = 4.1\,\mathrm{MeV} \\ E_{kin,\nu} &= E_\nu = pc = 29.7\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Wegen $\vec{p} = m\vec{v}$ und $E = mc^2$ folgt für die Geschwindigkeit eines Teilchens $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$; damit also $v_\nu = c$; $\quad v_\mu = 0.27\, c$.