Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

1. Übung

Wiederholungsfragen

1. Wie ist ein Vektor definiert? Wie können Summe und Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ veranschaulicht werden (Skizze!)?
2. Wie sind Skalarprodukt und Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert? Wie kann man sich diese Produkte geometrisch veranschaulichen?
3. Was versteht man unter dem Spatprodukt von Vektoren?
   (Zur Namensgebung: www.mineralienatlas.de/lexikon/index.php/Calcit)
4. Wie kann man das doppelte Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen?
5. Welche anschauliche Bedeutung hat die Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ mit t als der Zeit?

Hinweis:
Wiederholen Sie den Abschnitt 1 der Vorlesung "Rechenmethoden in der Physik"
(Dr. Weißbarth, www.physik.tu-dresden.de/itp/members/weiss/index.html, Password: rm07&FUN)

1.1 Geometrie mit Vektoren

Welche geometrischen Gebilde im dreidimensionalen Raum werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \vec{a}\,\vec{r} &= c \qquad \vec{a}, c = \text{konstant} \\ (\vec{a} \times \vec{r})^2 &= c \qquad \vec{a}, c = \text{konstant} \\ \vec{e}\,\vec{r} - (\vec{e} \times \vec{r})^{\,2} &= 0 \qquad \vec{e} = \text{konstant} \qquad ; \qquad \vec{e}^{\,2} = 1 \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{r}$ der variable Ortsvektor.
Welche anschauliche Bedeutung haben die Größen $\vec{a}$, $\vec{e}$ und c ?

1.2 Vektorielle Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\vec{r}$ auf:

$$\begin{aligned} \vec{r} + \vec{a} &= (\vec{r}\,\vec{c})\,\vec{b} \\ \vec{d} &= \left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})\right] + (\vec{r}\,\vec{b})\,\vec{c}, \end{aligned}$$

wobei die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ konstant sein sollen.

1.3 Parameterdarstellung in der Ebene

$\vec{e}_1^{\,\prime}$ und $\vec{e}_2^{\,\prime}$ seien zwei orthonormale Basisvektoren, die die x'- und und y'-Achse definieren. Ein Massepunkt durchläuft die Bahnkurve

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t\right)\vec{e}_1^{\,\prime} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t\right)\vec{e}_2^{\,\prime} \\ &\equiv x'\vec{e}_1^{\,\prime} + y'\vec{e}_2^{\,\prime}\,,\end{aligned}$$

wobei a_1, a_2 und ω konstant sind und positive Werte haben.

a) Gehen Sie von der Basis $\vec{e}_1^{\,\prime}$, $\vec{e}_2^{\,\prime}$ derart zu einer neuen orthonormalen Basis $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ über, daß die Parameterdarstellung der Bahnkurve (Parameter ωt) besonders einfach wird!

b) Welche geometrische Form hat die Bahnkurve?

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$!

d) Berechnen Sie die Beträge von $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$!

e) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{r}(t)$ und $\vec{a}(t)$?

f) Berechnen Sie $\dot{r} = \frac{d}{dt}|\vec{r}|$!

1.4 Quadratischer Spline

Ein quadratischer Spline ist eine parametrisierte Kurve der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{u} + \vec{v}\,t + \vec{w}\,t^2\,.$$

Sie kann benutzt werden, um eine (differenzierbare) Kurve durch drei vorgegebene Punkte im Raum zu legen. Bestimmen Sie die konstanten Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$, wenn die Kurve bei $\vec{r}_0$ zum Zeitpunt $t_0 = 0s$ beginnen, den Punkt $\vec{r}_1$ bei t_1 erreichen und bei $\vec{r}_2$ und $t_2 = 1s$ enden soll. Wie groß ist die Geschwindigkeit und Beschleunigung im Punkt $\vec{r}_1$, wenn $\vec{r}(t)$ den Ort eines Massepunktes zur Zeit t beschreiben soll?
Welche Maßeinheiten müssen dann $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben?

1.5* Winkelsumme im Dreieck

Zeigen Sie, daß in einem EUKLIDischen Raum beliebiger Dimension die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Hinweis: Wiederholen Sie die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen! Zeigen Sie, daß $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$. Stellen Sie die drei Seiten durch Vektoren dar und benutzen Sie *keine* Komponentenschreibweise.