Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

5. Übung

Wiederholungsfragen

1. Wie ist der Nabla Operator definiert? Wie sieht er unter Benutzung der EINSTEINsche Summationsvorschrift aus?
2. Was versteht man unter Gradient, was unter Rotation?
3. Was versteht man unter Zirkulation?
4. Was sagt der STOKES'sche Satz aus?
5. Wann ist eine Kraft konservativ, wann dissipativ?
6. Wie wird die kinetische, wie die potentielle Energie eingeführt?

5.1 Nabla-Operator

a) Berechnen Sie zunächst die folgenden Ausdrücke in kartesischen Koordinaten. Bringen Sie die so gewonnenen Ergebnisse in eine koordinatenfreie Form!

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{r} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} r.$$

b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, **ohne** eine spezielle Koordinatendarstellung zu benutzen.

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{r}\right) \qquad \vec{\nabla} f(r) \qquad \vec{\nabla}\left[\vec{a} \times \vec{r}\right]^2 \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{r} - \left[\vec{a} \times \vec{r}\right]^2\right)$$

sowie

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{2}\,\vec{a} \times \vec{r}\right] \qquad \vec{\nabla} \times \left[f(r) \cdot \vec{r}\right] \qquad \vec{\nabla} \times \left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{r}\right)\right] .$$

Dabei ist $\vec{r}$ der Ortsvektor, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, $f(r)$ eine beliebige differenzierbare Funktion und $r \equiv \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$.

5.2 Potentialberechnung

Für folgende Kraftfelder gebe man die Potentiale an, falls diese existieren.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{a)} & \vec{F} & = & c(\vec{r} - \vec{r}_0) & \\
\text{b)} & \vec{F} & = & \dfrac{df(r)}{dr}\dfrac{\vec{r}}{r} & \\
\text{c)} & \vec{F} & = & \vec{a} \times \vec{r} & \\
\text{d)} & \vec{F} & = & \vec{a}\dfrac{df(u)}{du} & \quad \text{mit } u = \vec{a}\vec{r} \\
\text{e)} & \vec{F} & = & \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r}) &
\end{array}
$$

Dabei ist $\vec{a}$ ein konstanter Vektor. Diskutieren Sie die Äquipotentialflächen!

5.3 Arbeit längs geschlossenem Weg

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a(3x - y)\,\vec{e}_x + b(2y - x)\,\vec{e}_y$ (a, b-const).

a) Welche Arbeit $W_{\mathcal{C}}$ verrichtet die Kraft bei der Verschiebung eines Teilchen entlang des geschlossenen Weges $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}: \quad \vec{r}(q) = 2c\,\cos q\,\vec{e}_x + 3c\,\sin q\,\vec{e}_y\,, \quad (q = 0 \ldots 2\pi)\ ?$$

b) Unter welcher Bedingung für a und b besitzt die Kraft ein Potential?
Berechnen Sie dann das zugehörige Potential $V(\vec{r})$.
Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\vec{F}(\vec{r})$ wieder aus $V(\vec{r})$ gewinnen.

5.4 Drehimpuls bei Ursprungsverschiebung

Der Koordinatenursprung werde um $\vec{r}_0$ von $\mathcal{O}$ nach $\mathcal{O}'$ verschoben, so daß für die Ortsvektoren gilt: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$. Wie transformiert sich der Drehimpuls $\vec{L}$ bei diesem Wechsel des Koordinatenursprungs?

5.5 Explizit zeitabhängige Kraft

Ein Teilchen (Masse $m =$ konst.) bewegt sich unter Einfluss einer Potentialkraft, die gemäß

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$$

explizit zeitabhängig ist.

a) Untersuchen Sie, ob der Energieerhaltungssatz gilt.

b) Untersuchen Sie weiterhin, ob die Arbeit, die bei der Verschiebung des Teilchens vom Ort $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}(t)$ verrichtet wird, vom Weg abhängt.