

# Theoretische Mechanik

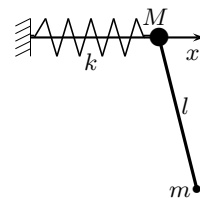
## 11. Übung

### Wiederholungsfragen

1. Was versteht man unter "Invarianz" einer physikalischen Größe unter "Eichtransformationen"?
2. Wie ist der verallgemeinerte Impuls definiert. Welche Maßeinheit hat er, wenn die zugehörige verallgemeinerte Koordinate eine Länge, eine Winkelvariable, eine Energie, ein Impuls bzw. ein Drehimpuls ist?
3. Wie sieht die LEGENDREtransformierte der Funktion  $f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$  bezüglich  $q_1$  aus?

### 11.1 Pendel mit federgeführtem Aufhängepunkt

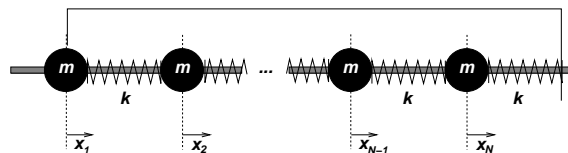
Ein ebenes mathematisches Pendel (masselose Stange der Länge  $l$ ) mit der Masse  $m$  ist an einem Teilchen der Masse  $M$  angebracht, das sich reibungsfrei entlang der Horizontalen ( $x$ -Achse) bewegen kann. Außerdem ist die Masse  $M$  an einer (horizontalen) Feder (Federkonstante  $k$ ) befestigt.



Bestimmen Sie die LAGRANGE-Funktion und die LAGRANGE-Gleichungen.

### 11.2 Oszillatorkette

$N$  gleiche Massen, die auf einer Stange reibungsfrei gleiten können, seien durch  $N$  gleiche Federn untereinander verbunden, wobei die Kraft der  $N$ -ten Feder durch eine geeignete masselose Apparatur zur ersten Masse zurückgeführt wird.



- a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen aus der LAGRANGE-Funktion des Systems.
- b) Lösen Sie diese für  $N = 3$  und die Anfangsbedingungen  $x_1(0) = -x_0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = x_0$  und  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_3(0) = 0$ .

- c) Bestimmen Sie für den Fall beliebiger  $N$  die Eigenfrequenzen des Systems, indem Sie die Auslenkungen als  $N$ -dimensionalen Vektor auffassen und das System der gekoppelten DGLs durch einen Exponentialansatz in ein Eigenwertproblem umformen. Die Eigenfrequenzen sind dann gerade die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix.

### 11.3 Geführtes Kugelpendel

Unter einem Kugelpendel versteht man eine Masse, die der Schwerkraft unterliegt und deren Koordinaten durch eine geeignete Vorrichtung (z.B. eine masselose Stange) auf eine Kugeloberfläche um den Aufhängepunkt beschränkt werden. Es soll hier nun der Fall betrachtet werden, daß sich der Aufhängepunkt eines solchen Kugelpendels längs der Raumkurve  $\vec{r}_0(t)$  bewegt. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, indem Sie als angepaßte Koordinaten Kugelkoordinaten bezüglich des Aufhängepunktes benutzen! Die Reibung soll vernachlässigt werden. Diskutieren Sie den Spezialfall  $\dot{\vec{r}}_0(t) = \text{const.}$  für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage des Pendels.

### 11.4 Eindeutigkeit der LAGRANGE-Funktion

Zeigen Sie mit Hilfe des HAMILTONSchen-Prinzips der kleinsten Wirkung die Invarianz der LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen unter der folgenden Transformation (Eichtransformation) der LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{L}}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) + \frac{d}{dt}\Omega(q_1, \dots, q_f, t).$$

wobei  $\Omega(q_1, \dots, q_f, t)$  eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion sei.