Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

12. Übung

Wiederholungsfragen

1. Welche physikalische Bedeutung hat der LIOUVILLEsche Satz?
2. Welche Eigenschaften haben die POISSON-Klammern?
3. Wie sind kanonische Transformationen definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Erhaltungsgrößen und kanonischen Transformationen?

12.1 Drehimpulsalgebra

a) Beweisen Sie für die kartesischen Drehimpulskomponenten $L_i = \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot p_k$ allein mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen algebraischen Relationen für POISSON - Klammern und der fundamentalen POISSON - Klammern für p_i, x_j die Relation

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} \cdot L_k \qquad\qquad \epsilon_{ijk} - \text{LEVI-CIVITA-SYMBOL.}$$

b) Die HAMILTON-Funktion eines Teilchens lautet $H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass speziell für ein Zentralpotential $U = U(r)$

$$\{H, L_k\} = 0 \qquad\qquad \left\{H, |\vec{L}|^2\right\} = 0$$

gilt. Welche Konsequenz hat das für die Zeitabhängigkeit des Drehimpulses?

12.2 Kanonische Transformation (I)

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen für die Parameter μ und λ

$$Q = \frac{1}{\mu} \cdot \arctan\left(\frac{\lambda q}{p}\right) \qquad\qquad P = \frac{1}{2} \cdot \left(p^2 + \lambda^2 q^2\right)$$

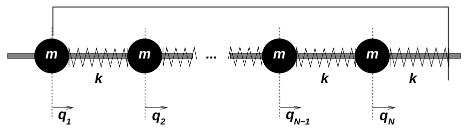
eine kanonische Transformation ist. Zeigen Sie dazu insbesondere, dass die Erzeugende $G(Q, q)$ die Form

$$G(Q, q) = \frac{\lambda}{2} \cdot q^2 \cdot \cot(\mu Q)$$

hat. Nutzen Sie diese Transformation, um die Zeitabhängigkeit von Ort und Impuls für den eindimensionalen harmonischen Oszillator zu bestimmen.

12.3 Oszillatorkette (II)

N gleiche Massen, die auf einer Stange reibungsfrei gleiten können, seien durch N gleiche Federn untereinander verbunden, wobei die Kraft der N-ten Feder durch eine geeignete masselose Apparatur zur ersten Masse zurückgeführt wird.



a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Problems, wobei Sie die Lagrange-Funktion aus Aufgabe 11.2 nutzen können.

b) Prüfen Sie, ob die Transformation

$$Q_m(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}jm} q_j \quad \text{mit} \quad m = 1, \ldots, N$$

$$P_m(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{N}jm} p_j$$

kanonisch ist!
Vorübung: Überzeugen Sie sich davon, daß die Transformierten der Quadrate q_j^2 und p_j^2 in den neuen Koordinaten wiederum reell sind. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{N}j(m-n)} = \delta_{n,m}$$

gilt, und benutzen Sie das, um die Umkehrtransformation herzuleiten und zu beweisen, daß aus $q_j = q_j^\star$ die Beziehung $Q_m^\star = Q_{-m}$ folgt!

c) Benutzen Sie die angegebene Transformation, um die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten auszudrücken!

d) Wie sehen die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen aus?

12.4* Kanonische Transformation (II)

Die Lagrange-Funktion eines Systems mit einem mechanischen Freiheitsgrad habe die Form

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}(\alpha \cdot \dot{x}^2 - \beta \cdot x^2) \cdot e^{\gamma t} \qquad , \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

a) Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen? Wie lautet der generalisierte (kanonische) Impuls? Charakterisieren Sie das durch $\mathcal{L}$ beschriebene System!

b) Finden Sie die Hamilton-Funktion $H(p, q, t)$!

c) Wie lauten die hamiltonschen Gleichungen? Untersuchen Sie dH/dt!

d) Die Hamilton-Funktion soll in neue Koordinaten, die gemäß

$$Q \equiv q \cdot e^{\gamma t} \qquad\qquad P \equiv p \cdot e^{-\gamma t}$$

definiert sind, umgeschrieben werden. Weisen Sie zunächst nach, daß es sich dabei um eine kanonische Transformation handelt! Finden Sie die transformierte Hamilton-Funktion $K(Q, P, t)$ und untersuchen Sie dK/dt.