Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

Lösungen der 1. Übung

1.1 Geometrie mit Vektoren

Welche geometrischen Gebilde im dreidimensionalen Raum werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

1.
$$\vec{a}\,\vec{r} = c \qquad \vec{a}, c = \text{konstant}$$

Indem man die Gleichung durch $|\vec{a}|$ teilt kommt man zur Hesseschen Normalform für eine Ebenengleichung mit Normalenvektor $\vec{a}/|\vec{a}|$.

2.
$$(\vec{a}\times\vec{r})^2 = c \qquad \vec{a}, c = \text{konstant}$$

Indem man die Wurzel zieht und den Betrag des Kreuzproduktes als $|\vec{a}\times\vec{r}| = ra\sin\theta$ ausschreibt, sieht man, daß alle Orte, deren senkrechter Abstand zur durch $\vec{a}$ gegebenen Achse konstant ist, die Gleichung erfüllen. Es handelt sich also um einen Zylindermantel mit $\vec{n} = \vec{a}/|\vec{a}|$ als Richtung der Zylinderachse.

3.
$$\vec{e}\,\vec{r} - (\vec{e}\times\vec{r})^{\,2} = 0 \qquad \vec{e} = \text{konstant} \qquad ; \qquad \vec{e}^{\,2} = 1$$

Der senkrechte Abstand von der Achse in Richtung $\vec{e}$ wächst quadratisch mit dessen Projektion in Achsrichtung. Es handelt sich also um die Mantelfläche eines Rotationsparaboloids mit $\vec{e}$ als Richtung der Symmetrieachse.

1.2 Vektorielle Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\vec{r}$ auf:

1.
$$\vec{r} + \vec{a} = (\vec{r}\,\vec{c})\,\vec{b}$$

Man benötigt $\vec{r}\,\vec{c}$. Dieses gewinnt man, indem die Gleichung mit $\vec{c}$ skalar multipliziert und anschließend nach $\vec{r}\,\vec{c}$ aufgelöst wird. Der letztere Schritt ist nicht durchführbar, wenn $\vec{b}\,\vec{c} = 1$ gilt. In diesem Fall gibt es nur dann Lösungen, und zwar unendlich viele, wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ orthogonal sind. Die Lösung im ersten Fall erhält man, indem man $\vec{r}\,\vec{c}$ in die Ausgangsgleichung einsetzt.

$$\vec{r} = -\vec{a} + \vec{b}\,\frac{(\vec{a}\,\vec{c})}{\vec{b}\,\vec{c} - 1}$$

2.

$$\vec{d} \;=\; \left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})\right] + (\vec{r}\,\vec{b})\,\vec{c},$$

Mittels des Zerlegungssatzes wird das doppelte Kreuzprodukt zerlegt. Anschließen verschafft man sich $\vec{a}\,\vec{r}$ bzw. $\vec{b}\,\vec{r}$, indem man die erhaltene Gleichung mit $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ skalar multipliziert und nach den gesuchten Skalarprodukten auflöst. Anschließend setzt man die Ergebnisse in das zerlegte Kreuzprodukt ein und erhält $\vec{r}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$.

$$\vec{r} = \vec{c}\cdot\frac{(\vec{a}\cdot\vec{d})}{(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})} - \frac{\vec{d}}{(\vec{a}\cdot\vec{b})} + \frac{\vec{b}}{(\vec{a}\cdot\vec{b})}\cdot\left\{\frac{(\vec{d}\cdot\vec{b})}{\vec{b}^2} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{d})\cdot\left[\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}\right]}{(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}^2)}\right\}.$$

Bemerkung: Stehen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander ($\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$) erhält man, dass dies mit der vorgelegten Gleichung nur verträglich ist, wenn auch $\vec{a}\cdot\vec{d} = 0$ ist.

1.3 Parameterdarstellung in der Ebene

a) Man führt neue Basisvektoren gemäß

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_1^{\,'} - \vec{e}_2^{\,'}) \qquad \vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_1^{\,'} + \vec{e}_2^{\,'})$$

und erhält damit

$$\vec{r}(t) = a_1 \cos\omega t\vec{e}_x + a_2 \sin\omega t\vec{e}_y = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

b) Es handelt sich um eine Ellipse mit den Halbachsen a_1 und a_2. Das sieht man, indem man ωt aus der Gleichung eliminiert und diese in Form einer Kegelschnittgleichung bringt.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$!

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega a_1 \sin\omega t\vec{e}_x + \omega a_2 \cos\omega t\vec{e}_y$$

und

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 a_1 \cos\omega t\vec{e}_x - \omega^2 a_2 \sin\omega t\vec{e}_y$$

d) Berechnen Sie die Beträge von $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$!

$$r = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \omega t + a_2^2 \sin^2 \omega t}$$

$$v = \omega \sqrt{\, a_1^2 \sin^2 \omega t + a_2^2 \cos^2 \omega t}$$

$$a = \omega^2 \sqrt{a_1^2 \cos^2 \omega t + a_2^2 \sin^2 \omega t}$$

e) Welche Beziehung besteht zwischen $\vec{r}(t)$ und $\vec{a}(t)$?

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

f) Berechnen Sie $\dot{r} = \frac{d}{dt}|\vec{r}|$!

$$\dot{r} = \frac{\omega(a_2^2 - a_1^2) \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \omega t + a_2^2 \sin^2 \omega t}}$$

1.4 Quadratischer Spline

Man setzt die drei gegebenen Raumpunkte in die Bahnkurve ein und erhält sofort

$$\vec{r}_0 \;=\; \vec{u}\,.$$

Die beiden anderen Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{u} + \vec{v}\,t_1 + \vec{w}\,t_1^2\,. \\ \vec{r}_2 &= \vec{u} + \vec{v}\,t_2 + \vec{w}\,t_2^2\,. \end{aligned}$$

multipliziert man mit t_2 bzw. t_1 und gewinnt durch Subtraktion eine Gleichung für $\vec{w}$. Analog gewinnt man eine Gleichung für $\vec{v}$, indem man die erste Gleichung mit t_2^2 bzw. die zweite mit t_1^2 multipliziert. und beide Gleichungen voneinander abzieht.
Man erhält

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t_2^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)t_1^2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \right) t + \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t_2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)t_1}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)} \right) t^2$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich dann als

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t_2^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)t_1^2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \right) + 2 \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t_2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)t_1}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)} \right) t\,.$$

Die Beschleunigung ist

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 2 \left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t_2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)t_1}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)} \right)\,.$$

Die Werte an der Stelle $\vec{r}_1$ gewinnt man, indem man t_1 für t einsetzt. Die Maßeinheit von $\vec{u}$ ist m, die von $\vec{v}$ m/s und die von $\vec{w}$ m/s^2.

1.5* Winkelsumme im Dreieck

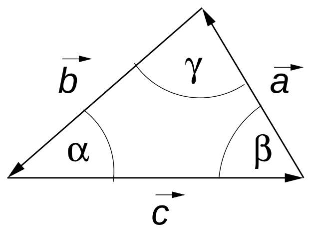
Zunächst zerlegt man den Cosinus mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

Im nächsten Schritt drückt man die Sinusfunktionen durch Cosinusfunktionen aus.
Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) \;&=\; \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta}\sqrt{1-\cos^2\gamma}\\ &\quad - \cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\gamma} - \cos\gamma\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}\end{aligned}$$

und diese wiederum durch Skalarprodukte von Vektoren



$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{bc}\\ \cos\beta &= -\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{ac}\\ \cos\gamma &= -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\end{aligned}$$

Man erhält z.B:

$$\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{a^2b^2}} = \frac{1}{ab}\sqrt{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Beachtet man noch $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ so findet man

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos^2\alpha} &= \frac{1}{bc}\sqrt{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\ \sqrt{1-\cos^2\beta} &= \frac{1}{ac}\sqrt{\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) &= \frac{1}{a^2b^2c^2}\Big(-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{a}) + \Big(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\Big)\Big(\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\Big)\Big)\\ &= \frac{-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\Big(\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\Big)\,\Big((\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}\Big) + \Big(\vec{a}^2\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\Big)\,\Big(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}\Big)}{a^2b^2(\vec{a}+\vec{b})^2}\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der Ausdrücke in den Klammern in Zähler und Nenner erhält man schließlich $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$, woraus $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ folgt.