Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

Lösungen der 2. Übung

2.1 Kugelkoordinaten:

a) Die Tangentenvektoren an die geodätischen Linien, die sich durch Festhalten von jeweils zwei Parametern ergeben, erhält man durch Differentiation nach dem verbliebenen Parameter. Die r-Linien sind vom Ursprung ausgehende Strahlen; die ϑ-Linien bilden Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt und die φ-Linien stellen Kreise um die z-Achse dar.

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= \frac{\partial \vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z \quad ; \quad |\vec{R}| = 1 \\
\vec{\theta} &= \frac{\partial \vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - r\sin\vartheta\,\vec{e}_z \quad ; \quad |\vec{\theta}| = r \\
\vec{\phi} &= \frac{\partial \vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} = -r\sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_y \quad ; \quad |\vec{\phi}| = r\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für die **Basisvektoren der Kugelkoordinaten:**

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\vec{R}}{R} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z \\
\vec{e}_\vartheta &= \frac{\vec{\theta}}{\theta} = \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\vartheta\,\vec{e}_z \\
\vec{e}_\varphi &= \frac{\vec{\phi}}{\phi} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y
\end{aligned}
$$

Wie man sich leicht anhand der Anschauung überzeugt, bilden die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_r\,, \vec{e}_\vartheta\,, \vec{e}_\varphi$ ein *Rechtssystem.*

b) Wenn der Körper sich im Raum bewegt, werden r, ϑ und φ und damit auch die Einheitsvektoren zeitabhängig.
Für die Ableitungen der Basisvektoren erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \\
\dot{\vec{e}}_\vartheta &= \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\,.
\end{aligned}
$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} = \vec{e}_\vartheta & \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\
\dfrac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\vec{e}_r & \dfrac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi} = \cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\
\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \vartheta} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\vartheta\,\vec{e}_r - \cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta
\end{array} ,
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\
\dot{\vec{e}}_\vartheta &= -\dot{\vartheta}\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta
\end{aligned}
$$

c) Die Darstellung des Ortsvektors ist sofort ersichtlich: $\vec{r} = r(t)\,\vec{e}_r(t)$
Für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
\vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} = \dot{\vec{v}} &= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\vartheta - r\,\dot{\vartheta}^2)\,\vec{e}_r \\
&\quad (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\,\ddot{\vartheta} - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta)\vec{e}_\vartheta \\
&\quad (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2\,r\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\cos\vartheta + r\sin\vartheta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

2.2 Bewegung in Polarkoordinaten

Man findet z.B. mit den Ergebnissen von Aufgabe 2.1, indem man dort $\vartheta = \pi/2$ setzt und damit die Bewegung auf die Ebene $z = 0$ beschränkt:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
&= r\,(k\,\vec{e}_r + \omega\,\vec{e}_\varphi) \\
\ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \\
&= r\,\Big((k^2 - \omega^2)\,\vec{e}_r + 2k\,\omega\,\vec{e}_\varphi\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\vec{t} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\,\vec{e}_r + \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\,\vec{e}_\varphi \\
\dot{\vec{t}} &= \frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\dot{\vec{e}}_r + \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\dot{\vec{e}}_\varphi \\
&= \frac{k\,\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\vec{e}_\varphi - \frac{\omega^2}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\vec{e}_r \\
|\dot{\vec{t}}| &= \omega \\
\vec{n} &= \frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\vec{e}_\varphi - \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\vec{e}_r\ .
\end{aligned}
$$

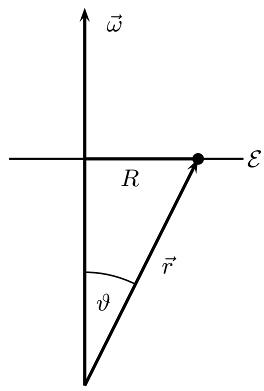
Die Tangentialbeschleunigung bzw. die Normalbeschleunigung findet man damit als

$$\begin{aligned} a_t &= \vec{t}\,\vec{a} \\ a_n &= \vec{n}\,\vec{a}\,. \end{aligned}$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine logarithmische Spirale, die für $k > 0$ nach außen und für $k < 0$ zum Zentrum hin durchlaufen wird.

2.3 Vektorielle DGL

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Durch skalare Multiplikation dieser Relation mit $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ erhalten wir alle notwendigen Aussagen über die Bewegung:

$$0 = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} \perp \vec{\omega}$$

Die *Bewegung* erfolgt also stets *in einer Ebene* $\mathcal{E}$ *senkrecht zum Vektor* $\vec{\omega}$.

$$0 = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\vec{r}\,| = const$$

Es handelt sich also um eine *Kreisbewegung* in einer Ebene senkrecht zu $\vec{\omega}$. Beachten wir, daß $\vec{\omega}$ und $|\vec{r}\,|$ konstant sind, ergibt eine Umformung der ersten Relation:

$$0 = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,) = \omega|\vec{r}\,|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\vartheta \quad \Longrightarrow \quad \vartheta = const$$

Damit ist die Lage der Ebene $\mathcal{E}$ fixiert und für den Radius des Kreises erhalten wir: $R = r\sin\vartheta$. Die konkreten Werte von r und ϑ werden durch die *Anfangsbedingungen* für die Bewegung festgelegt.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega}\vec{r})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r} \end{aligned}$$

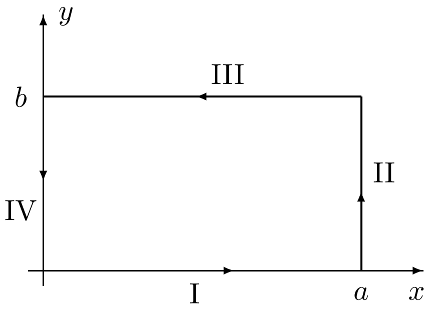
2.4 Bogenlänge mittels Linienintegral

1. *Parameterdarstellung* des Kreises: Parameter φ, $\varphi = 0 \ldots 2\pi$

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R\cos\varphi & \mathrm{d}x &= -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y(\varphi) &= R\sin\varphi \quad \Longrightarrow & \mathrm{d}y &= \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \oint \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, R = 2\pi R$$

2. *Parameterdarstellung* der vier Seiten:



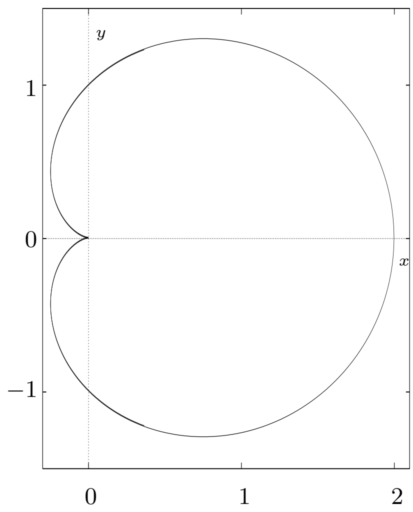
I: Parameter: $x = 0 \dots a\,,\, y = 0\,;\, \mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
II: Parameter: $y = 0 \dots b\,,\, x = a\,;\, \mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$
III: Parameter: $x = a \dots 0\,,\, y = b\,;\, \mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
IV: Parameter: $y = b \dots 0\,,\, x = 0\,;\, \mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int\limits_{\mathrm{I}} \mathrm{d}s + \int\limits_{\mathrm{II}} \mathrm{d}s + \int\limits_{\mathrm{III}} \mathrm{d}s + \int\limits_{\mathrm{IV}} \mathrm{d}s = 2\int\limits_0^a \mathrm{d}x + 2\int\limits_0^b \mathrm{d}y = 2(a+b)$$

Vorbemerkung: Die Kardioide wird durch einen markierten Punkt auf dem Umfang eines Kreises beschrieben, wenn dieser an einem festen Kreis mit gleichem Durchmesser a abrollt ohne zu rutschen.

Das Bogenlängenelement in ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ oder Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \pi/2$) erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi) &= \rho(\varphi)\,\vec{e}_\rho(\varphi) \Longrightarrow \\ \mathrm{d}\vec{r} &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\vec{e}_\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,; \end{aligned}$$



Kardioide $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$

3. damit wird

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}\,| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \quad \text{Wegen } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -a\sin\varphi \quad \text{erhalten wir}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2} = \sqrt{2}\,a\;2\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde noch berücksichtigt, daß der Integrand symmetrisch zu $\varphi = \pi$ ist. Das Integral kann mit der Substitution $\cos\varphi = u$ gelöst werden (beachte: $\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}u/\sqrt{1-u^2}$)

$$s = 2\sqrt{2}\,a\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}u\,\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{2}\,a\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}} = 2\sqrt{2}\,a\left(-2\sqrt{1-u}\Big|_{-1}^{+1}\right) = 8a$$

Bem.: Andere Möglichkeit unter Benutzung eines Additionstheorems:

$$\begin{aligned} s &= 2\sqrt{2}\,a\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}\,a\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}\,a\,\sqrt{2}\,2\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,a\,\sqrt{2}\,2\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi\,\cos\psi = 8a \end{aligned}$$