Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

4. Übung Lösungen

4.1 Spezielle Kraftgesetze

Lösen Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung für folgendes Kraftgesetz

$$\vec{F} = a\mathrm{e}^{-\gamma t}\vec{e}_x - by\vec{e}_y - c\dot{z}\vec{e}_z \,,$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y + v_0\vec{e}_z$, wobei a, b, c und γ positive Konstanten seien.

Aus dem NEWTONschen Grundgesetz erhält man drei nicht gekoppelte DGL, so daß die Bewegung in alle drei Raumrichtungen unabhängig voneinander betrachtet werden kann.

x-Richtung: Hier liegt der Fall $F_x = F_x(t)$ vor, der durch direkte Integration gelöst wird.

$$m\ddot{x} = a\mathrm{e}^{-\gamma t} \qquad \text{mit den AB} \qquad x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Durch zweimalige Integration findet man zunächst

$$x(t) = \frac{a}{m\gamma^2}\mathrm{e}^{-\gamma t} + C_1 t + C_2\,,$$

was bei Berücksichtigung der AB zur Lösung

$$x(t) = \frac{a}{m\gamma^2}\mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{a}{m\gamma}t - \frac{a}{m\gamma^2}$$

führt.

y-Richtung: Hier liegt der Fall $F_y = F_y(y)$ vor, den man durch die "Energiemethode" löst.

$$m\ddot{y} = -by \qquad \text{mit den AB} \qquad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = v_0\,.$$

Multiplikation mit $\dot{y}$ führt zu

$$m\dot{y}\ddot{y} = -by\dot{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{m\dot{y}^2}{2} = -\frac{d}{dt}\frac{by^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{by^2}{2} = C_3\,.$$

Die Konstante C_3 bestimmt sich aus den AB zu

$$C_3 = \frac{mv_0^2}{2}\,.$$

Indem man nach $\dot{y}$ auflöst

$$\dot{y} = \pm\sqrt{v_0^2 - \omega^2 y^2} \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 := \frac{b}{m}$$

und die Variablen trennt

$$\frac{dy}{\sqrt{y_0^2 - y^2}} = \omega dt \qquad \text{mit} \qquad y_0^2 := \frac{v_0^2}{\omega^2} = \frac{mv_0^2}{b}\,.$$

Unbestimmte Integration, wobei es ausreicht, sich auf das positive Vorzeichen zu beschränken, liefert mit der Substitution $y = a\sin\varphi$

$$\varphi + C_4 = \omega dt \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = y_0 \sin(\omega t - C_4)\,.$$

Die Integrationskonstante hat die Bedeutung des Phasenwinkels und wird aus den AB zu $C_4 = 0$ bestimmt.

z-Richtung: Hier liegt der Fall $F_z = F_z(\dot{z})$ vor, der durch Substitution $u = \dot{z}$ auf eine DGL 1.Ordnung zurückgeführt wird, die durch TdV gelöst wird:

$$m\ddot{z} = -c\dot{z} \qquad \text{mit den AB} \qquad z(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{z}(0) = v_0\,.$$

$$m\dot{u} = -cu \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{u} = -\frac{c}{m}dt \qquad \Longrightarrow \qquad \ln\frac{u}{C_5} = -\frac{c}{m}t\,.$$

Indem man die Anfangsbedingung für $\dot{z}$ einsetzt, erhält man

$$\dot{z} = v_0 \mathrm{e}^{-\Gamma t} \qquad \text{mit} \qquad \Gamma = \frac{c}{m}\,,$$

woraus sich nach nochmaliger Integration

$$z(t) = -\frac{v_0}{\Gamma}\mathrm{e}^{-\Gamma t} + C_6$$

ergibt. Indem man noch die AB für $z(0)$ verwendet, erhält man

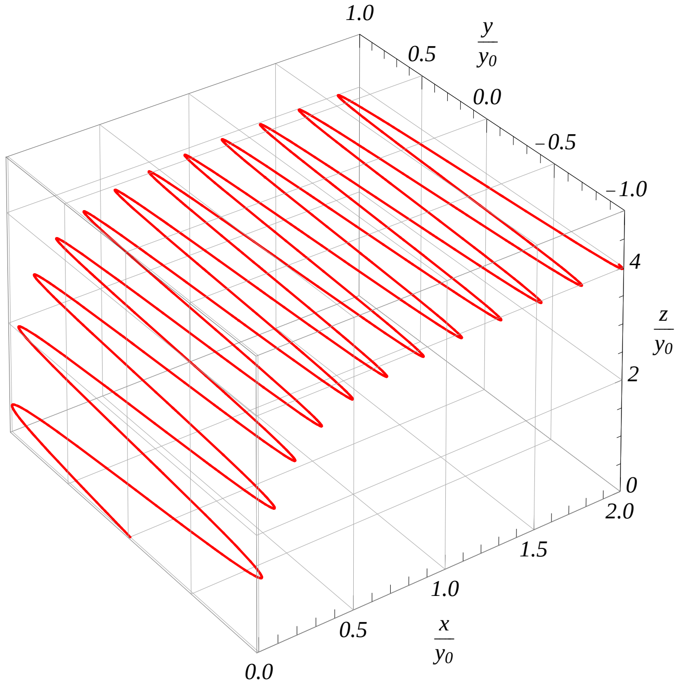
$$z(t) = \frac{v_0}{\Gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\Gamma t}\right)\,.$$

Für die Bahnkurve ergibt sich schließlich

$$\vec{r}(t) = \frac{a}{m\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} + \gamma t - 1\right)\vec{e}_x + y_0\sin(\omega t)\,\vec{e}_y + \frac{v_0}{\Gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\Gamma t}\right)\vec{e}_z$$

Wie sieht die Bewegung nach sehr langen Zeiten aus?

Für große Zeiten sind die Exponetialfunktionen abgeklungen und es bleibt eine ebene Bewegung in der Fläche $z = \frac{mv_0}{c}$ übrig. Diese setzt sich aus einer gleichförmigen Bewegung in x-Richtung und einer Oszillation in y-Richtung zusammen.



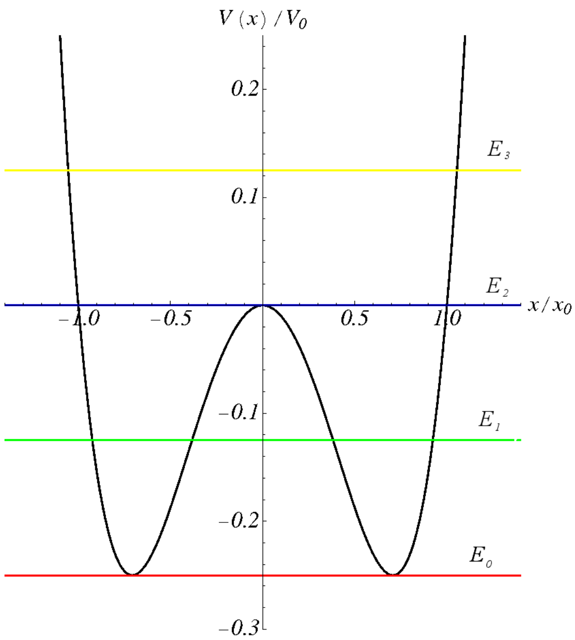
Bahnkurve für $m = 1\,\mathrm{m}$, $a = 0.25\,\mathrm{N}$, $b = 16\pi^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $c = \pi\frac{\mathrm{N}s}{\mathrm{m}}$ und $v_0 = 4\pi\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, womit sich für die Längeneinheit $y_0 = 1\,\mathrm{m}$ ergibt.

4.2 Bewegung im Phasenraum

Ein Körper der Masse m bewegt sich eindimensional mit der Energie E im Potential

$$V(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x^4 \qquad\qquad a, b > 0$$

a) Diskutieren Sie qualitativ den Bewegungsablauf für verschiedene Energien (Skizze!)!



bei E3: Geschlossene Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten.

bei E2: Geschlossene Bewegung auf der Separatrix . Die Schwingungsdauer divergiert.

bei E1: Das System befindet sich entweder links, oder rechts und führt dort eine geschlossene Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten aus.

bei E0: Das System befindet sich im Grundzustand, wobei es entweder links oder rechts im Potentialminimum ruht.

b) Bestimmen Sie den Impuls $p(x) = m\dot{v}(x)$ in Abhängigkeit vom Ort und stellen Sie $p(x)$ in einem $p - x$ - Diagramm grafisch dar. Gehen Sie dabei zu dimensionslosen Größen über, indem Sie den Impuls, den Ort und die Energie in Einheiten messen, die in geeigneter Weise aus den Konstanten a, b und m gebildet werden.

Indem man $b \cdot x^4$ im Potential ausklammert, findet man, daß die Dimension von a/b gerade m^2 ist, so daß man mit $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ eine Längeneinheit gewinnt.

$$\begin{aligned} V(x) &= b \cdot x^4 \left(1 - \frac{a}{bx^2}\right) =: b \cdot x^4 \left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right) \\ &= bx_0^4 \frac{x^4}{x_0^4} \left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right) := V_0 \frac{x^4}{x_0^4} \left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Mit $V_0 = \frac{a^2}{b}$ wurde eine Energieeinheit eingeführt, aus der man durch Multiplikation mit der Masse eine Impulseinheit erhält:

$$\frac{p_0^2}{2m} \quad := \quad V_0 = \frac{a^2}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad p_0 = \sqrt{\frac{2m}{b}} a \, .$$

Für die Energie des Systems findet man damit

$$\varepsilon \;=\; \pi^2 - \xi^2 + \xi^4 \quad \text{mit} \quad \varepsilon := \frac{E}{V_0}\,, \quad \xi := \frac{x}{x_0} \quad \text{und} \quad \pi := \frac{p}{p_0}$$

Schließlich führt man noch über

$$\pi \;=\; \frac{p}{p_0} = \frac{m}{p_0}\frac{dx}{dt} = \frac{m\,x_0}{p_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{m\,x_0}{p_0}\frac{d\xi}{dt} =: \frac{d\xi}{d\tau}$$

die dimensionslose Zeit

$$\tau \;=\; \frac{t}{t_0} \qquad \text{mit} \qquad t_0 = \sqrt{\frac{m}{2a}}$$

ein.

c) Bestimmen Sie $x(t)$ für die Bewegung des Köpers für den Fall $E = 0$.
Hinweis: $\int dx \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$
Zunächst erhält man durch Trennung der Variablen

$$\pi \;=\; \frac{d\xi}{d\tau} = \pm\sqrt{\xi^2 - \xi^4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\xi}{-\sqrt{\xi^2-\xi^4}} = \frac{d\xi}{-|\xi|\,\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{d\xi}{\xi\,\sqrt{1-\xi^2}} = d\tau\,,$$

wobei man sich auf negative Orte beschränkt hat und der geignete Zweig der Phasenraumkurve ausgewählt wurde. Als nächstes wird diese Gleichung integriert

$$\int\limits_{\xi_u}^{\xi} \frac{d\xi'}{\xi'\sqrt{1-\xi'^2}} \;=\; \int\limits_{\tau_u}^{\tau} d\tau'\,,$$

wobei ξ_u die Koordinate des Umkehrpunktes und τ_u der zugehörige Zeitpunkt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\tau_u = 0$ wählen. ξ_u bestimmt sich aus der Bedingung $\pi(\tau_u) = 0$ zu $\xi_u \in \{-1, 0, +1\}$, wobei für den hier ausgewählten Zweig -1 zu nehmen ist.

$$\int\limits_{-1}^{\xi} \frac{d\xi'}{\xi'\sqrt{1-\xi'^2}} \;=\; \ln\frac{-\xi}{1+\sqrt{1-\xi^2}} = \tau$$

Nach Auflösung der Gleichung erhält man

$$\xi \;=\; -\frac{1}{\cosh\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = -\frac{x_0}{\cosh\frac{t}{t_0}}$$

d) Leiten Sie aus dem Energiesatz eine Integralformel für die Zeit $T(E)$, die der Körper für seine Bewegung zwischen den Umkehrpunkten benötigt, her!

An den Umkehrpunkten ist der Impuls Null. Man erhält als reelle Lösungen der biquadratischen Gleichung im Bereich $-1/4 < \varepsilon < 0$

$$\xi_{u,1} = -\sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}} \qquad \xi_{u,2} = -\sqrt{\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}}$$
$$\xi_{u,3} = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}} \qquad \xi_{u,4} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}}\,,$$

und im Bereich $\varepsilon > 0$ die beiden Lösungen

$$\xi_{u,1} = -\sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}} \qquad \xi_{u,2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \varepsilon}}\,.$$

$$T = t_0 \int_{\tau_{u,1}}^{\tau_{u,2}} d\tau' = t_0\left(\tau_{u,2} - \tau_{u,1}\right) = t_0 \int_{\xi_{u,1}}^{\xi_{u,2}} \frac{d\xi'}{\sqrt{\varepsilon + \xi^2 - \xi'^4}}$$

e) Wie groß ist die Schwingungsdauer bei $E_0 = -a^2/(4b)$?

Bei $E_0 = -a^2/(4b)$, d.h. $\varepsilon = -1/4$ befindet sich das Teilchen in einem der beiden Potentialminima.

Berechnen Sie $T(E_0 + \delta E)$ näherungsweise für Energien die nur wenig größer als E_0 sind!

Für geringe Auslenkungen aus der Ruhelage setzt man

$$\varepsilon = -\frac{1}{4} + \delta_E \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta_x\,,$$

womit sich unter Weglassen von Termen, die in vierter Ordnung klein sind, näherungsweise

$$\delta_E = \dot{\delta}_x^2 + 2\delta_x^2$$

ergibt. Man sieht also, daß das System harmonische Schwingungen um die Ruhelage ausführt:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\delta_E}{2}} \cos\left(\sqrt{2}\tau + C\right)\,.$$

Wählt man wieder $\xi(t=0) = \xi_{u,1} = -\sqrt{\frac{\delta_E}{2}}$ ergibt sich schließlich

$$\delta_x = -\sqrt{\frac{\delta_E}{2}} \cos\left(\sqrt{2}\tau\right) \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} t_0\,.$$

4.3 Fall mit Reibung

Der freie Fall eines Körpers, der als Massepunkt betrachtet werde, erfolgt unter dem Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und der Luftreibungskraft, die über

$$\vec{F}_L = -\vec{v} \cdot (\beta + \gamma \cdot |\vec{v}|)\,, \qquad\qquad \beta, \gamma > 0, \text{konst.}$$

von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Körpers abhängt.

a) Formulieren Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung in koordinatenfreier Darstellung.

$$m\dot{\vec{v}} \;=\; -\beta\vec{v} - \gamma v\vec{v} + m\vec{g}$$

Welche Differentialgleichungen müssen demnach die Geschwindigkeitskomponenten v_j in kartesischen Koordinaten erfüllen (Annahme: Fallbeschleunigung $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$) ?

$$\begin{aligned}
\dot{v}_x + \frac{\beta}{m}v_x + \frac{\gamma}{m}v\,v_x &= 0 \\
\dot{v}_y + \frac{\beta}{m}v_y + \frac{\gamma}{m}v\,v_y &= 0 \\
\dot{v}_z + \frac{\beta}{m}v_z + \frac{\gamma}{m}v\,v_z &= -g
\end{aligned}$$

b) Überlegen Sie sich qualitativ, wie die Bewegung abläuft. Wie verhalten sich v_x, v_y und v_z insbesondere für sehr große Zeiten t?

Während die Bewegung in x- bzw. y-Richtung schnell abklingt, nimmt, falls die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als die Endgeschwindigkeit ist, die Geschwindigkeit in -z-Richtung zu, bei abnehmender Beschleunigung. Das geht solange bis die Gesamtkraft Null wird. Danach bewegt sich der Körper mit nahezu konstanter Geschwindigkeit v_∞ senkrecht nach unten.

c) Gewinnen Sie aus den Bewegungsgleichungen für v_x und v_y eine Differentialgleichung für die Größe $\eta^2 \equiv v_x^2 + v_y^2$ und untersuchen Sie den Grenzfall $v_z^2 \gg \eta^2$.
Indem man die erste Gleichung mit v_x und die zweite Gleichung mit v_y multipliziert und beide Gleichungen addiert, findet man

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) + \left(\frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{m}v\right)(v_x^2 + v_y^2) \;=\; \eta\,\dot{\eta} + \left(\frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{m}\sqrt{v_z^2 + \eta^2}\right)\eta^2 = 0$$

Hier ist η per definitionem positiv semidefinit. Deshalb kann bis auf den Fall der trivialen Lösung, die nur für Anfangsbedingungen $v_x(0) = v_y(0) = 0$ auftreten kann, durch η geteilt werden. Für $\eta^2 \ll v_z^2$ erhält man für v näherungsweise

$$v \;=\; \sqrt{v_z^2 + \eta^2} = |v_z|\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_z^2}} = -v_z\sqrt{1 + \xcancel{\frac{\eta^2}{v_z^2}}} \approx -v_z\,,$$

wobei das negative Vorzeichen mit Blick auf die AB gewählt wurde.

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} + \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{m}v_z\right)\eta &= 0 \\
\dot{v}_z + \frac{\beta}{m}v_z - \frac{\gamma}{m}v_z^2 &= -g
\end{aligned}$$

d) Für die Anfangsbedingungen $v_x(0) = v_y(0) = 0$ ist $\eta(t) = 0$ eine mögliche Lösung. Lösen Sie die dann noch verbleibende Differentialgleichung für $v_z(t)$ durch Trennen der Variablen mit der Anfangsbedingung $v_z(0) = 0$.

$$\frac{dv_z}{v_z^2 - \frac{\beta}{\gamma} v_z - \frac{mg}{\gamma}} = \frac{\gamma}{m}\, dt$$

Mit den Nullstellen des Nenners

$$v_{1,2} = \frac{\beta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\gamma^2} + \frac{mg}{\gamma}}$$

gewinnt man die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{v_z^2 - \frac{\beta}{\gamma} v_z - \frac{mg}{\gamma}} = \frac{1}{v_1 - v_2} \left(\frac{1}{v_z - v_1} - \frac{1}{v_z - v_2} \right),$$

die nach Integration zu

$$\ln \left| \frac{v_z - v_1}{v_z - v_2} \right| = \Gamma\, t + \tilde{C} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{\gamma}{m}(v_1 - v_2) > 0$$

führt. Exponentieren, ergibt dann

$$\frac{v_z - v_1}{v_z - v_2} = C\, \mathrm{e}^{\Gamma\, t},$$

wobei das Vorzeichen, welches beim Auflösen des Betrages ins Spiel kommt, in die ohnehin noch unbekannte Integrationskonstante C gesteckt wurde. Diese bestimmt sich aus der Anfangsbedingung $v_z(0) = 0$ zu:

$$C = \frac{v_1}{v_2}.$$

Indem man nach v_z auflöst, findet man schließlich

$$v_z = v_1 \frac{1 - \mathrm{e}^{\Gamma\, t}}{1 - \frac{v_1}{v_2}\, \mathrm{e}^{\Gamma\, t}}.$$

Man überzeugt sich, daß im Grenzfall großer Zeiten die Geschwindigkeit gegen $v_2 < 0$ geht:

$$\lim_{t \to \infty} v_z(t) = \cancel{v_1} \frac{\cancel{\mathrm{e}^{\Gamma t}} \left(1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\Gamma t}}\right)}{\frac{\cancel{v_1}}{v_2} \cancel{\mathrm{e}^{\Gamma t}} \left(1 - \cancel{\frac{v_2}{v_1} \mathrm{e}^{-\Gamma t}}\right)} = v_2\,.$$