Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

5. Übung Lösungen

5.1 Nabla-Operator

a) Berechnen Sie zunächst die folgenden Ausdrücke in kartesischen Koordinaten. Bringen Sie die so gewonnenen Ergebnisse in eine koordinatenfreie Form!
Hier ist $\vec{r}$ der Ortsvektor, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, $f(r)$ eine beliebige differenzierbare Funktion und $r \equiv \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_x & \vec{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

Desweitern soll hier noch das dyadische Produkt berechnet werden:

$$\vec{\nabla}\circ\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{array}{c} (x\,,\,y\,,\,z) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbb{1}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, **ohne** eine spezielle Koordinatendarstellung zu benutzen.

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = (\nabla\circ\vec{r})\,\vec{a} = \mathbb{1}\,\vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right)\vec{\nabla} r = f'(r)\vec{e}_r$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\,(\vec{a}\times\vec{r})^2 &= \vec{\nabla}\,((\vec{a}\times\vec{r})\;(\vec{a}\times\vec{r})) = \vec{\nabla}\left(a^2r^2-(\vec{a}\vec{r})^2\right)\\
&= a^2\,\vec{\nabla}r^2 - 2\,(\vec{a}\vec{r})\;\vec{\nabla}\,(\vec{a}\vec{r}) = a^2\,2\,r(\vec{\nabla}r) - 2\,(\vec{a}\vec{r})\;(\vec{\nabla}\circ\vec{r})\,\vec{a}\\
&= 2\,a^2\vec{r} - 2\,(\vec{a}\vec{r})\,\mathbb{1}\,\vec{a} = 2\left(a^2\mathbb{1}-\vec{a}\circ\vec{a}\right)\vec{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}-[\vec{a}\times\vec{r}]^2\right) &= \vec{\nabla}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}) - \vec{\nabla}\left([\vec{a}\times\vec{r}]^2\right)\\
&= \vec{a} - 2\left(a^2\mathbb{1}-\vec{a}\circ\vec{a}\right)\vec{r}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{2}\,\vec{a}\times\vec{r}\right] = \frac{1}{2}\,\vec{a}\left(\vec{\nabla}\vec{r}\right) - \frac{1}{2}\,(\vec{\nabla}\circ\vec{r})\vec{a} = \frac{3}{2}\,\vec{a} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\,\vec{a} = \vec{a}
$$

$$
\vec{\nabla}\times[f(r)\cdot\vec{r}] = \left(\vec{\nabla}f(r)\right)\times\vec{r} + f(r)\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{r}}_{=0} = \frac{f'(r)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{=0} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)\right] &= \vec{\nabla}\times\left(\vec{b}(\vec{a}\vec{r})-(\vec{a}\vec{b})\vec{r}\right)\\
&= \left(\vec{\nabla}(\vec{a}\vec{r})\right)\times\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{r})}_{=0} = \vec{a}\times\vec{b}
\end{aligned}
$$

5.2 Potentialberechnung

Für folgende Kraftfelder gebe man die Potentiale an, falls diese existieren. Dabei ist $\vec{a}$ ein konstanter Vektor. Diskutieren Sie die Äquipotentialflächen!

a) $\vec{F} = c(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$$
\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\,(c(\vec{r}-\vec{r}_0)) = c\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad V(\vec{r}) \quad \text{existiert.}
$$

Das Potentials ergibt sich

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r})-V(\vec{r}_0) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}'\,c(\vec{r}'-\vec{r}_0) = -c\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}'\,\vec{r}' + c\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}'\,\vec{r}_0\\
&= -\frac{c}{2}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d(r'^2) + c\,\vec{r}_0\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' = -\frac{c\,r^2}{2} + \frac{c\,r_0^2}{2} + c\,\vec{r}_0\,\vec{r} - c\,\vec{r}_0^2\\
V(\vec{r}) &= -\frac{c}{2}(\vec{r}-\vec{r}_0)^2\,,
\end{aligned}
$$

wobei über die Integrationskonstante $V(\vec{r}_0)$ so verfügt wurde, daß man sofort sieht, daß es sich um das Potential eines dreidimensionalen, harmonischen Oszillators handelt. Die Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugelflächen um den Punkt $\vec{r}_0$.

b) $\vec{F} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$

Mit $\frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \vec{\nabla} f(r)$ folgt $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(r) = 0$, d.h. $V(\vec{r})$ existiert.

Das Potential ergibt sich damit sofort zu $V(\vec{r}) = -f(r)$. Die Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugelflächen um den Ursprung.

c) $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{a}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{r})}_{=3} - (\vec{a}\,\vec{\nabla})\vec{r} = 3\vec{a} - \vec{a}\,\underbrace{\vec{\nabla} \circ \vec{r}}_{\mathbb{1}} = 3\vec{a} - a\mathbb{1} = 2\vec{a} \neq 0\,.$$

Es existiert also kein Potential.

d) $\vec{F} = \vec{a}\,\frac{df(u)}{du}$ mit $u = \vec{a}\vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{a}\frac{df(u)}{du}\right) = \left(\vec{\nabla}\frac{df(u)}{du}\right) \times \vec{a} = \frac{d^2 f(u)}{du^2}\,\underbrace{\vec{\nabla} u}_{=\vec{a}} \times a = \frac{d^2 f(u)}{du^2}\,\vec{a} \times \vec{a} = 0\,.$$

Das Potential ist

$$V(\vec{r}) = -f(u)\,,$$

wovon man sich durch Probe leicht überzeugt. Die Äquipotentialflächen gewinnt man aus $f(u) =$ const., was auf $u =$ const. führt. Das beschreibt Ebenen mit dem Normalenvektor $\vec{a}$.

e) $\vec{F} = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})) = \vec{\nabla} \times \big(\vec{a}(\vec{a}\,\vec{r}) - a^2\vec{r}\big) \\ &= \underbrace{\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\,\vec{r})\right)}_{=\vec{a}} \times \vec{a} - a^2\,\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{r}}_{=0} = \vec{a} \times \vec{a} = 0\end{aligned}$$

Das Potential soll diesmal mit „unbestimmter Integration“ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}V(\vec{r}) - V_0 &= -\int d\,\vec{r}\,\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = -\int d\vec{r}\,\big(\vec{a}(\vec{a}\,\vec{r}) - \vec{a}^2\vec{r}\big) \\ &= -\int d\left(\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2}{2}\right) + \vec{a}^2 \int d\left(\frac{\vec{r}^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}^2\vec{r}^2 - (\vec{a}\,\vec{r})^2) = \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2}r_\perp^2\,.\end{aligned}$$

Für die Äquipotentialflächen muß $r_\perp$=constant gelten. Es handelt sich also um konzentrische Zylinderflächen, wobei die Zylinderachse durch den Ursprung geht und in Richtung von $\vec{a}$ zeigt.

5.3 Arbeit längs geschlossenem Weg

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a(3x-y)\,\vec{e}_x + b(2y-x)\,\vec{e}_y$ (a, b-const).

a) Welche Arbeit $W_{\mathcal{C}}$ verrichtet die Kraft bei der Verschiebung eines Teilchen entlang des geschlossenen Weges $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}: \quad \vec{r}(q) = 2c\,\cos q\,\vec{e}_x + 3c\,\sin q\,\vec{e}_y\,, \quad (q = 0\ldots 2\pi)\ ?$$

$$W_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dq\,\vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dq}\,dq$$

Das gibt mit

$$\vec{r} = \underbrace{2c\cos q}_{=x(q)}\,\vec{e}_x + \underbrace{3c\sin q}_{=y(q)}\,\vec{e}_y \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\vec{r}}{dq} = -2c\sin q\,\vec{e}_x + 3c\cos q\,\vec{e}_y$$

$$W_{\mathcal{C}} = 6c^2(3b-2a)\int_0^{2\pi} dq\,\sin q\cos q + 6ac^2\int_0^{2\pi} dq\,\sin^2 q - 6bc^2\int_0^{2\pi} dq\,\cos^2 q\,.$$

Für die Integrale findet man

$$\int_0^{2\pi} dq\,\sin q\cos q = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq\,\sin 2q = -\frac{1}{4}\cos 2q\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} dq\,\sin^2 q = \int_0^{2\pi} dq\,\cos^2 q = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq\,(\sin^2 q + \cos^2 q) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq = \frac{1}{2}q\Big|_0^{2\pi} = \pi\,,$$

was zu $W_{\mathcal{C}} = 6\pi c^2(a-b)$ führt.

b) Unter welcher Bedingung für a und b besitzt die Kraft ein Potential?
Berechnen Sie dann das zugehörige Potential $V(\vec{r})$.
Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\vec{F}(\vec{r})$ wieder aus $V(\vec{r})$ gewinnen.

Da die Arbeit längs eines geschlossenen Weges verschwinden muß, ergibt sich aus a) als notwendige Bedingung $a = b$. Das ist aber noch nicht hinreichend, da ja $W_{\mathcal{C}}$ entlang **jedes** geschlossenen Weges verschwinden muß. Eine hinreichende Bedingung gewinnt man aus dem Verschwinden der Rotation:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(3x-y) & b(2y-x) & 0 \end{vmatrix} = (a-b)\,\vec{e}_z \stackrel{!}{=} \vec{0} \;\Rightarrow\; a = b\,.$$

Damit ist die Bedingung $a = b$ auch hinreichend.

Die z-Komponente der Kraft sagt uns, daß das Potential nur von x und y abhängen kann. Aus der x-Komponente der Kraft findet man durch Integration zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x} V = a(y-3x) \qquad \Longrightarrow \qquad V = -\frac{3}{2}ax^2 + a\,x\,y + \tilde{V}(y)\,,$$

wobei die Integrationskonstante bezüglich der x-Integration $\tilde{V}(y)$ zunächst noch eine unbestimmte Funktion von y ist. Indem man diesen Ausdruck in die y-Komponente der Kraft einsetzt, findet man

$$\frac{\partial}{\partial y} V = a\,x + \frac{d\tilde{V}}{dy} \stackrel{!}{=} a\,x - 2a\,y \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{V}(y) = -a\,y^2 + V_0$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Potential

$$V(\vec{r}) = -\frac{3}{2}ax^2 + a\,x\,y - a\,y^2 + V_0\,.$$

5.4 Drehimpuls bei Ursprungsverschiebung

Der Koordinatenursprung werde um $\vec{r}_0$ von $\mathcal{O}$ nach $\mathcal{O}'$ verschoben, so daß für die Ortsvektoren gilt: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$. Wie transformiert sich der Drehimpuls $\vec{L}$ bei diesem Wechsel des Koordinatenursprungs?
Für den Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhält man mit $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$ wegen $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,'$

$$\vec{L} = m\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}\,' + m\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}\,' + m\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}} \;\Rightarrow\; \vec{L}\,' = \vec{L} - m\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}$$

5.5 Explizit zeitabhängige Kraft

Ein Teilchen (Masse $m =$ konst.) bewegt sich unter Einfluss einer Potentialkraft, die gemäß

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r},t)$$

explizit zeitabhängig ist.

a) Untersuchen Sie, ob der Energieerhaltungssatz gilt!

Zur Untersuchung des Energieerhaltungssatzes wird die Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ multipliziert:

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}U(\vec{r}(t),t).$$

Entsprechend der Kettenregel wird die totale Ableitung des Potentials nach t benutzt:

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t),t) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}U(\vec{r}(t),t) + \frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r}(t),t).$$

Das ergibt die zeitliche Änderung der Energie:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(\vec{r}(t),t)\right] \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r}(t),t) \neq 0.$$

Die Energie eines Teilchens bei Bewegung in einem solchen Kraftfeld bleibt also nicht erhalten. Außerdem ist zu erkennen, dass diese Gleichung keine Hilfe bei der Integration der Bewegungsgleichung ist, weil die rechte Seite nur dann bekannt ist, wenn man das Ort-Zeit-Gesezt $\vec{r}(t)$ kennt, das man ja aber erst berechnen will!

b) Untersuchen Sie weiterhin, ob die Arbeit, die bei der Verschiebung des Teilchens vom Ort $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}(t)$ verrichtet wird, vom Weg abhängt.

Wenn die Kraft nicht zeitabhängig ist, erhält man die Arbeit durch eine quasistatische Verschiebung des Teilchens vom Anfangsort $\vec{r}_0$ zu einem Ort $\vec{r}$, sozusagen bei „eingefrorener Zeit“. Hier aber erfolgt die Verschiebung vom Ort $\vec{r}_0$, an dem sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet, zu einem Ort $\vec{r}(t)$, den es zum Zeitpunkt t erreicht. Dabei durchläuft es eine Kurve $\vec{r}\,'(t')$ mit $0 < t\,' < t$. Zur Berechnung der Arbeit setzen wir die Kraft als Gradienten des Potentials ein und nutzen wieder die totale Ableitung des Potentials nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}\,'\vec{F}(\vec{r}\,'(t'), t') \\
&= \int_{t_0}^{t} dt'\vec{F}(\vec{r}\,'(t'), t') \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\
&= -\int_{t_0}^{t} dt' \left[\frac{d}{dt'}U(\vec{r\,'}(t'), t') - \frac{\partial}{\partial t'}U(\vec{r\,'}(t'), t)\right] \\
&= U(\vec{r}_0, t_0) - U(\vec{r}(t)) + \int_{t_0}^{t} dt'\frac{\partial}{\partial t'}U(\vec{r\,'}(t'), t).
\end{aligned}$$

Die Arbeit ist also offensichtlich abhängig vom Weg, auf dem das Teilchen verschoben wird. Im Unterschied zu einer rein ortsabhängigen Potentialkraft verschwindet die Arbeit nicht, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt t wieder den Ausgangsort $\vec{r}_0$ erreicht.