Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

7. Übung Lösungen

7.1 Pendel im Fahrstuhl

In einem Fahrstuhl, der in vertikaler Richtung gleichmäßig beschleunigt wird, befindet sich ein mathematisches Pendel. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Beschleunigung $\vec{a} = a\vec{e}_z$!

Körper im Fahrstuhl spüren zusätzlich zur normalen Schwerkraft noch die Trägheitskraft.

$$m\ddot{\vec{r}}' = -mg\,\vec{e}_z + \vec{F}_T = -mg\,\vec{e}_z - ma\,\vec{e}_z$$

Die DGL ergibt sich damit zu

$$\dot{\vec{L}}' = \vec{r}' \times \vec{F}' \,.$$

Wählt man die x-z-Ebene als Schwingungsebene, so ergibt sich mit $x = l\sin\varphi$ und $z = -l\cos\varphi$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -m(g+a)l\sin\varphi \Longrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{(g+a)}{l}\sin\varphi = 0$$

Für kleine Auslenkungen findet man also

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g+a}{l}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

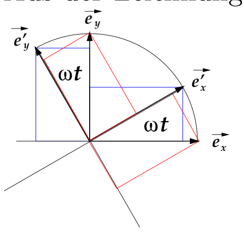
Diskussion: Für $a+g > 0$ ist die untere Gleichgeichtslage stabil. Um diese können Schwingungen ausgeführt werden.
Für $a+g = 0$ ist die Kraftsumme auf das Pendel Null. Der Körper ist „schwerelos“ Die Schwingungsdauer divergiert. Falls eine Anfangs(-winkel)-geschwindigkeit vorliegt, rotiert der Massepunkt gleichförmig. Für $a+g < 0$ wird die untere Gleichgewichtslage labil und die obere stabil, um die dann Schwingungen ausgeführt werden können.

7.2 Rotierendes Bezugssystem

Betrachtet werden zwei Koordinatensysteme Σ und Σ', von denen sich das zweite relativ zum ersten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die gemeinsame z-Achse dreht, wobei zum Zeitpunkt t=0 die Systeme zusammenfallen sollen.

a) Stellen Sie die Basisvektoren des gestrichenen Systems durch $\vec{e}_x'$, $\vec{e}_y'$ und $\vec{e}_z'$ durch die Basisvektoren des ungestrichenen Systems $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ dar und umgekehrt.

Aus der Zeichnung liest man sofort ab:



$$\begin{aligned} \vec{e}_x^{\,\prime} &= \vec{e}_x \cos\omega t + \vec{e}_y \sin\omega t \\ \vec{e}_y^{\,\prime} &= -\vec{e}_x \sin\omega t + \vec{e}_y \cos\omega t \\ \vec{e}_z^{\,\prime} &= \vec{e}_z \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \vec{e}_x^{\,\prime} \cos\omega t - \vec{e}_y^{\,\prime} \sin\omega t \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_x^{\,\prime} \sin\omega t + \vec{e}_y^{\,\prime} \cos\omega t \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z^{\,\prime} \end{aligned}$$

b) Ein Körper bewege sich in Σ geradlinig und gleichförmig entlang der x-Achse, wobei er sich bei t=0 im Ursprung befindet. Welche Kraft wirkt auf ihn?

In Σ gilt

$$x(t) = v_0\, t \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{0}\,.$$

Damit verschwindet die Kraft.

c) Berechnen Sie die Bahnkurve $\vec{r'}$ im rotierenden System! Fertigen Sie eine Skizze an!

$$\vec{r}(t) = v_0 t \vec{e}_x = v_0 t \cos\omega t \vec{e}_x^{\,\prime} - v_0 t \sin\omega t \vec{e}_y^{\,\prime} = x'(t)\vec{e}_x^{\,\prime} + y'(t)\vec{e}_y^{\,\prime} + z'(t)\vec{e}_z^{\,\prime}$$

$$\Longrightarrow \qquad x'(t) = v_0 t \cos\omega t \quad , \quad y'(t) = -v_0 t \sin\omega t \quad \text{und} \quad z'(t) = 0$$

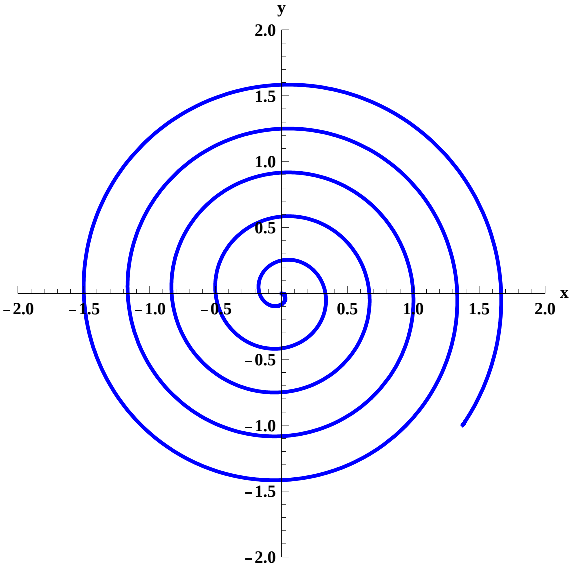
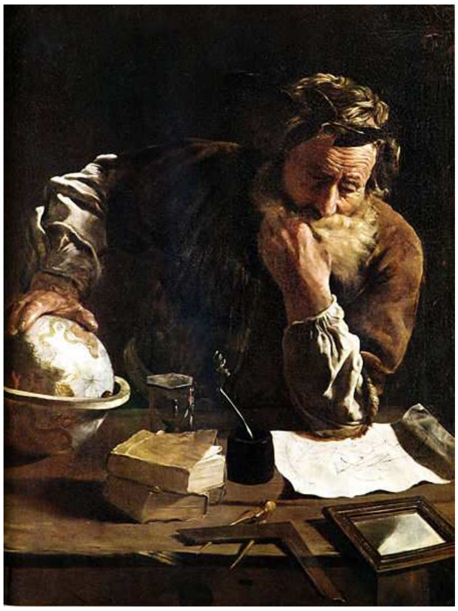
Die Bahnkurve liegt in der Ebene $z' = 0$. Die Form sieht man leicht, wenn man zu Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten (mit $\vartheta = \pi/2$) übergeht.

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= r'^2 = v_0^2 t^2 \quad &\Longrightarrow& \quad r'(t) = v_0 t \\ \tan\varphi' &= \frac{y'}{x'} = -\tan\omega t \quad &\Longrightarrow& \quad \varphi'(t) = -\omega t \end{aligned}$$

Eliminieren von t führt zu

$$r' = -\frac{v_0}{\omega}\varphi'\,.$$

Es handelt sich also um eine archimedische Spirale.
Siehe: Archimedes von Syrakus, *De spiralibus* (Über Spiralförmige Linien), Selbstverlag, Syrakus, ca. 200 v.Chr..
Und hier noch etwas „Heimatkunde für Dresdner Studenten“: Das rechte Bild „Portrait des Archimedes“ wurde 1620 von Domenico Fetti in Mantua gemalt und wurde 1743 für die Dresdner Sammlungen angekauft. Es befindet sich in der Gemäldegalerie „Alte Meister“.

d) Welche Kraft erfährt der Körper im rotierenden System?

In Σ' berechnet man die Kraft am besten in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{F}' &= F'_{r'}\vec{e}_{r'} + F'_{\varphi'}\vec{e}_{\varphi'} \\ &= m(\underbrace{\ddot{r}'}_{=0} - r'\,\dot{\varphi}'^2)\vec{e}_{r'} + m(2\dot{r}'\dot{\varphi}' + r'\,\underbrace{\ddot{\varphi}'}_{=0})\vec{e}_{\varphi'} \\ &= -m\,\omega^2 r'\,\vec{e}_{r'} - 2m\,v_0\omega\,\vec{e}_{\varphi'}\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$-m\,\omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = -m\,\vec{\omega}\,\underbrace{(\vec{\omega}\,\vec{r}\,')}_{=0} + m\,\omega^2\,\vec{r}\,' = m\,\omega^2\,r'\,\vec{e}_{r'}$$

und

$$-2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' = -2m\,\dot{r}'\omega\,\vec{e}_{z'}\times\vec{e}_{r'} - 2m\,r'\,\omega\,\dot{\varphi}'\vec{e}_{z'}\times\vec{e}_{\varphi'} = -2\,m\,v_0\omega\vec{e}_{\varphi'} - 2m\,r'\,\omega^2\,\vec{e}_{r'}$$

läßt sich das in die in der Vorlesung hergeleitete allgemeine Form

$$\vec{F}' = -m\,\omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2\,m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

umschreiben.

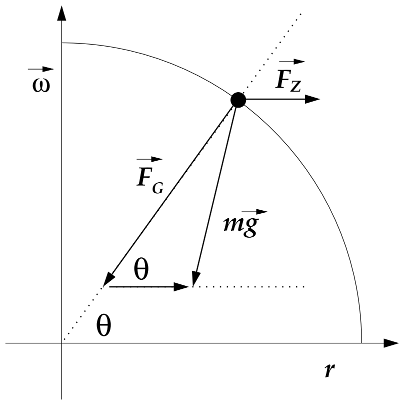
7.3 Winkelabweichung der Erdbeschleunigung

Ein Körper befinde sich an einem Punkt der Erdoberfläche mit der nördlichen Breite θ in Ruhe.

a) Welche Kräfte wirken auf ihn (von einem Erdenbürger aus betrachtet!)?

Der Erdenbürger befindet sich in einem beschleunigten Bezugssystem. Da der Körper ruht, tritt zusätzlich zur Gravitationskraft $\vec{F}_G$ nur noch die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ auf.

b) Vergleichen Sie die Beträge der auftretenden Kräfte! Welcher kleine Parameter läßt sich bilden?



Der Betrag der Gravitationskraft für die als Kugel angenommenen Erde ist

$$F_G \;=\; \gamma \frac{mM}{r_E^2} =: m\tilde{g}\,.$$

Für den Betrag der Zentrifugalkraft ergibt sich

$$F_Z \;=\; m\omega^2 r_E \cos\theta = m\tilde{g}\delta\cos\theta\,,$$

wobei eine kleine dimensionslose Konstante

$$\delta = \omega^2 r_E/\tilde{g} = 0.00345$$

eingeführt wurde.

c) Bestimmen Sie die Betragsabweichung der (scheinbaren) Erdbeschleunigung g der rotierenden Erde von derjenigen $\tilde{g}$, die bei einer ruhenden Erde auftreten würde. Gehen Sie dabei von der vereinfachenden Annahme aus, daß die Erde eine starre, homogene Kugel sei.

Für den Betrag der Gewichtskraft findet man aus dem Cosinussatz

$$\begin{aligned} mg &= \sqrt{F_G^2 + F_Z^2 - 2\,F_G\,F_Z\cos\theta} \\ g &= \frac{F_G}{m}\sqrt{1 - 2\,\frac{F_Z}{F_G}\cos\theta + \underbrace{\cancel{(\frac{F_Z}{F_G})^2}}_{\propto\,\delta^2}} \\ &\approx m\tilde{g}\left(1 - \delta\cos^2\theta\right)\,. \end{aligned}$$

d) Wie hängt die Winkelabweichung $\Delta\theta$ von der geographischen Breite θ ab?

Für die Winkelabweichung $\Delta\theta$ findet man aus dem Sinussatz, wenn wieder Größen $\sim\delta^2$ vernachlässigt werden,

$$\frac{\sin\theta}{mg} = \frac{\sin\Delta\theta}{F_z} \Longrightarrow \Delta\theta \approx \sin\Delta\theta \approx \frac{F_z}{mg}\sin\theta \approx \delta\cos\theta\sin\theta = \frac{\delta}{2}\sin 2\theta$$

Die Winkelabweichung ist also bei 45° nördlicher (südlicher) Breite am größten!

e) Diskutieren Sie qualitativ die Form der Äquipotentialflächen der resultierenden Gesamtkraft?

Für die Äquipotentialflächen muß $mgh = \text{const.}$ gelten, wobei hier $h \ll r_E$ die Höhe. über der kugeligen Erde sei. Das bedeutet, daß

$$\begin{aligned} mgh &= m\tilde{g}h\left(1 - \delta\cos^2\theta\right) = \text{const.} \\ \Longrightarrow\quad & h = \frac{\text{const.}}{m\tilde{g}}\,\frac{1}{1-\delta\cos^2\theta} \approx \frac{\text{const.}}{m\tilde{g}}\,\left(1 + \delta\cos^2\theta\right) \end{aligned}$$

Man liest also ab, daß an den Polen ($\theta = \pm 90°$) die Äquipotentialflächen gegenüber dem Maximalwert am Äquator abgeplattet sind.

Was wird passieren, wenn die Erde als plastisch deformierbarer Körper angenommen wird?

Die Erdmassen werden sich so verschieben, daß $\vec{g}$ überall senkrecht auf der Erdoberfläche steht. Damit weicht die Form der Erde von der Kugelgestalt ab, was dann wiederum zu einer Änderung von $\vec{g}$ führt usw. usf..

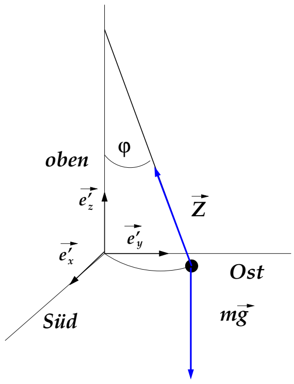
Um dieses Problem zu lösen, reicht es nicht mehr aus, die Erde als kugelsymmetrisch zu betrachten (und erst recht nicht als Massepunkt!). Das Potential der Gravitationskraft kann dann i.a. nur noch numerisch (oder unter vereinfachenden Annahmen über eine Multipolentwicklung) berechnet werden. Das führt zu sehr komplizierten Gleichungen, die selbstkonsistent gelöst werden müssen.

Geht man noch weiter ins Detail, so müssen auch noch die elastischen Eigenschaften, die Inhomogenitäten der Dichte, die durch Temperaturgradienten bedingten Masseverschiebungen im Inneren usw. usf. berücksichtigt werden. Ein weites Feld ....

7.4 FOUCAULTsches Pendel

Es soll die Bewegung eines mathematischen Pendels der Länge l, und der Masse m auf der mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega =$ konst. rotierenden Erde näherungsweise berechnet werden. Der Koordinatenursprung des Bezugssystems Σ' werde in den Aufhängepunkt des Pendels gelegt, der sich an einem Ort auf nördlicher geografischer Breite θ befindet. Die $z'-$ Achse zeige vom Erdmittelpunkt weg, die $x'-$Achse weise nach Süden, die $y'-$Achse nach Osten.

a)



Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten auf. Begründen Sie, dass Terme der Ordnung ω^2 vernachlässigbar sind. Vernachlässigen Sie ferner die vertikale Bewegung des Pendels (Weshalb ist dies sinnvoll?). Bestimmen Sie mit diesen Näherungen die linearisierten Bewegungsgleichungen.

Infolge seiner Trägheit behält ein mathematisches Pendel seine Schwingungsbene bei (vom Inertialsystem aus beschrieben). Zeichnet man (Beobachter auf der rotierenden Erde!) die Pendelbewegung auf einer darunter befindlichen Unterlagea auf, s werden Bahnen registriert, die so aussehen, als würde sich unter Berücksichtigung der Erdrotation die Unterlage langsam unter dem Pendel drehen.

Dies soll näherungsweise berechnet werden, wobei zunächst die Bewegungsgleichung für den Pendelkörper hergeleitet wird.

Den Hauptteil der Zentrifugelkraft kann man dadurch berücksichtigen, daß man die scheinbare Erdbeschleunigung betrachtet (Siehe Aufgabe 7.3). Die Zusatzterme, die durch die Auslenkung des Pendels hinzukommen sind sehr klein und können vernachlässigt werden.

Wenn die Ruhelage des Pendels mit $\vec{r}_0$ und die Auslenkung des Pendels mit $\delta\vec{r}$ bezeichnet werden, sind die Beiträge durch die Auslenkung

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) - \vec{F}(\vec{r}_0) \quad = \quad \delta\vec{r}\left(\nabla \circ \vec{F}(\vec{r})\right)_{\vec{r}=\vec{r}_0} \ .$$

Man findet also für die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) \quad \approx \quad m\vec{g} + m\,\omega^2\,(\mathbb{1} - \vec{e}_\omega \circ \vec{e}_\omega)\ \delta\vec{r} + 2m\tilde{g}\frac{\delta\vec{r}}{r_E} - 2m\omega\vec{e}_\omega \times \vec{v}\,' \ ,$$

wobei $\vec{v}\,' = \dot{\delta\vec{r}}$ die Geschwindigkeit des Massepunktes darstellt. Die Abkürzungen für g und $\tilde{g}$ sind wie in Aufgabe 7.3 gewählt.

Das Verhältnis der durch die Auslenkung bedingten Zusatzterme von Zentrifugalkraft zu CORIOLIS-Kraft schätzt man zu

$$\left|\frac{\Delta\vec{F}_Z}{\Delta\vec{F}_C}\right| \quad \approx \quad \frac{m\omega^2\,|\delta\vec{r}|}{2m\omega\,k\,|\delta\vec{r}|} = \frac{\omega}{2k} \approx 10^{-4}$$

ab, wobei über $|\vec{v}\,'| \approx k|\delta\vec{r}|$ die Kreisfrequenz des mathematischen Pendels $k = \sqrt{g/l}$ eingeführt wurde, und für l 67 m gewählt wurde. Man kann also die Zusatzbeiträge der Zentrifugalkräfte vernachlässigen. Die Bewegungsgleichung lautet damit in dieser Näherung

$$m\ddot{\vec{r}} \quad = \quad \vec{Z} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

Zur Gewichtskraft tritt noch die Zwangskraft $\vec{Z}$ des Fadens hinzu, die erforderlich ist, um den Pendelkörper im festen Abstand vom Aufhängepunkt zu halten:. $\vec{Z}$ ist jedoch zunächst unbekannt, da die Belastung des Fadens von der Geschwindigkeit des Pendelkörpers abhängt (Sie ist im unteren Durchgangspunkt am größten!). Die Geschwindigkeit ist aber erst nach Lösen der Bewegungsgleichung bekannt, in die aber $\vec{Z}$ eingeht!

Um eine analytische Lösung des Problems zu finden, ist man deshalb auf Näherungen angewiesen. Das folgende Vorgehen zur Lösung des Problems ist ein Beispiel für Störungsrechnung in der Mechanik.

Zunächst werden die vektoriellen Größen im Koordinatensystem Σ' (siehe Abbildung) in Komponenten angeschrieben (das Pendel befindet sich am Ort mit der geografischen Breite θ):

$$\begin{aligned}
m\vec{g} &= -mg\,\vec{e}_{z'} && (1)\\
\vec{\omega} &= \omega\ (\vec{e}_{z'}\sin\theta - \vec{e}_{x'}\cos\theta)\\
\vec{Z} &= -Z\,\frac{x}{l}\,\vec{e}_{x'} - Z\,\frac{y}{l}\,\vec{e}_{y'} + Z\,\frac{l-z}{l}\,\vec{e}_{z'}\\
\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} &= -\omega\,\sin\theta\,\dot{y}\,\vec{e}_{x'} + \omega\,(\cos\theta\,\dot{z} + \sin\theta\,\dot{x})\,\vec{e}_{y'} - \omega\,\cos\theta\,\dot{y}\,\vec{e}_{z'}
\end{aligned}$$

Dies ergibt ein System von 3 miteinander gekoppelten Differentialgleichungen:

$$m\ddot{x} \quad = \quad -Z\,\frac{x}{l} + 2m\,\omega\,\dot{y}\,\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} \quad = \quad -Z\,\frac{y}{l} - 2m\,\omega\,(\dot{x}\,\sin\theta + \dot{z}\,\cos\theta) \qquad (3)$$

$$m\ddot{z} \quad = \quad Z\,\frac{l-z}{l} - mg + 2m\,\omega\,\dot{y}\,\cos\theta \qquad (4)$$

• **Näherung:** Die Auslenkung $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$des Pendels sei stets klein gegenüber der Pendellänge.
Es gilt damit im

$$z = -\sqrt{l^2-\rho^2} = -\,left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{l^2} + \dots \approx -l$$

Die Bewegung erfolgt bis zu Termen erster Ordnung in der $x-y$ - Ebene. Weiterhin $\dot{z} = \ddot{z} = 0$. (Projektion der Bewegung auf die $x-y$ - Ebene)

Aus Gleichung (3) kann damit in dieser Näherung die Zwangskraft bestimmt werden:

$$Z = mg - 2m\dot{y}\,\omega\,\cos\theta\,.$$

Einsetzen von Z in (1) und (2) ergibt zwei miteinander gekoppelte **nichtlineare** Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{l}\,g + 2\,\frac{x}{l}\,\dot{y}\,\omega\cos\theta + 2\,\dot{y}\,\omega\sin\theta \tag{5}$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{l}\,g + 2\,\frac{y}{l}\,\dot{y}\,\omega\cos\theta - 2\,\dot{x}\,\omega\sin\theta \tag{6}$$

Weil ω, x und y kleine Größen sind, sind die Produktterme $x\,\dot{y}$ und $y\,\dot{y}$ erst recht klein und können vernachlässigt werden, so dass sich endgültig ein **linearisiertes Gleichungssystem** ergibt:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{l}\,g + 2\,\dot{y}\,\omega\sin\theta$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{l}\,g - 2\,\dot{x}\,\omega\sin\theta$$

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Größe $u \equiv x' + i\,y'$ mit den Anfangsbedingungen $x\,'(0) = a,\ \ y\,'(0) = 0, \dot{x}\,'(0) = \dot{y}\,'(0) = 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Zunächst kann es in kompakter Form mit der Größe $u \equiv x + i\,y$ geschrieben werden:

$$\ddot{u} = -\frac{g}{l}\,u - 2\,i\,\omega\sin\theta\,\dot{u}\,.$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form wie die der gedämpften freien Schwingung! Die Lösungsmethode ist aus der Vorlesung bekannt (Vorlesung Kap. 1.2.6). Mit dem Ansatz $u = C\,e^{\lambda\,t}$ ergibt sich

$$u(t) = A\,e^{\lambda_1\,t} + B\,e^{\lambda_2\,t} \qquad \lambda_{1,2} = -i\,\alpha \pm i\,k \qquad \alpha \equiv \omega\,\sin\theta, k^2 \equiv g/l\,.$$

Dabei wurde benutzt, dass $\alpha^2 \ll k^2$ gilt. Die Integrationskonstanten A, B werden durch die Anfangsbedingungen, z.B. $u(0) = a, \dot{u} = 0$ festgelegt. Wir erhalten in diesem Falle

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a}{2k}\left\{(k-\alpha)\,e^{-it(\alpha+k)} + (k+\alpha)\,e^{-it(\alpha-k)}\right\} \\ &= \frac{a}{2}\,e^{-i\alpha t}\left\{(1-\frac{\alpha}{k})e^{ikt} + (1+\frac{\alpha}{k})e^{-ikt}\right\} \\ &\approx a\,e^{-i\alpha t}\,\cos kt \\ &\stackrel{!!}{=} e^{-i\alpha t}\,u_0(t)\,.\,. \end{aligned}$$

Dabei wurde wieder $\alpha \ll k$ genutzt. Mit $u_0(t)$ wurde die Bewegung ohne Berücksichtigung der Erdrotation (Bewegung eines Pendels mit der Amplitude a und mit der Frequenz $k^2 = g/l$) bezeichnet.
Der Exponent der komplexen Exponentialfunktion enthält den Einfluss der CORIOLISkraft in der betrachteten Näherung.

Der letzte Ausdruck (Diskussion in der GAUSS'schen Zahlenebene ; geometrische Veranschaulichung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen !) beschreibt, daß sich die $x - y-$ Ebene mit der Kreisfrequenz $\alpha = \omega \sin\theta$ dreht. Auf der nördlichen Erdhalbkugel ist dies eine Drehung im Uhrzeigersinn, auf der südlichen Erdhalbkugel eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Projektion der Pendelbewegung auf die $x - y-$ Ebene ergibt dabei Rosettenbahnen, deren genaue Form jedoch entscheidend von den Anfangsbedingungen abhängt.